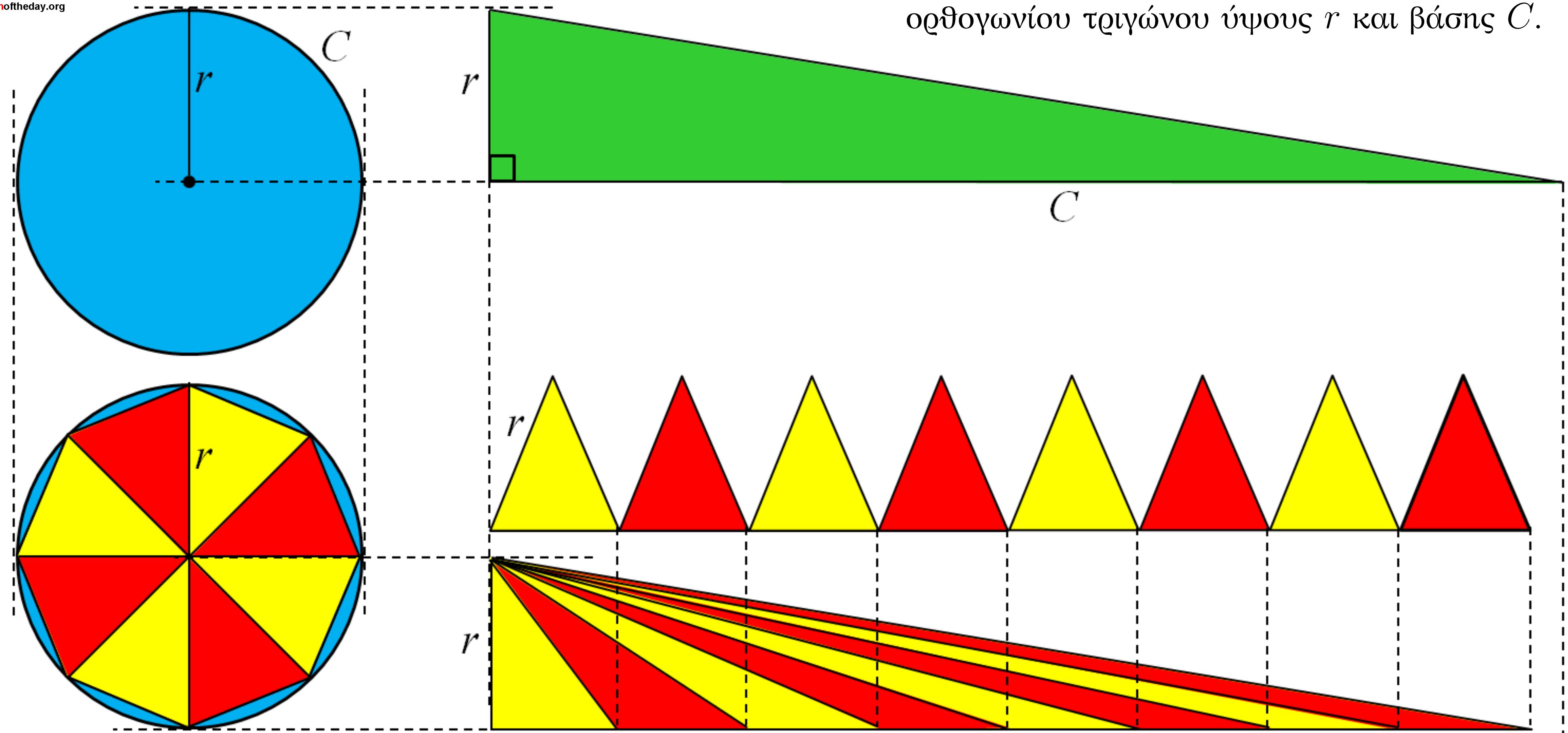
www.theoremoftheday.org

**Εμβαδόν κύκλου:** Το εμβαδόν ενός κύκλου ακτίνας $r$ και περιφέρειας $C$ ισούται με το εμβαδόν ορθογωνίου τριγώνου ύψους $r$ και βάσης $C$.




Στα αρχαία Ελληνικά Μαθηματικά δεν υπήρχε η έννοια του τύπου. Π.χ. στα «Στοιχεία» του Ευκλείδη δεν γίνεται αναφορά στο γινόμενο $ab$ αλλά στο εμβαδόν ορθογωνίου με μήκη πλευρών $a$ και $b$. Ομοίως για το εμβαδόν του κύκλου δεν γινόταν αναφορά στον γνωστό μας τύπο $\pi r^2$ αλλά στην ισότητα με το εμβαδόν κάποιου απλούστερου γεωμετρικού σχήματος. Στο $12^{\text{ο}}$ βιβλίο των Στοιχείων, τέτοιες ισότητες αποδεικνύονται με την λεγόμενη «**μέθοδο της εξάντλησης**» η οποία αποδίδεται στον Εύδοξο. Τυπικές εφαρμογές της μεθόδου χρησιμοποιούν την εις άτοπον απαγωγή. Στην περίπτωσή μας η σύγκριση των εμβαδών $A_K$ του κύκλου και $A_T$ του τριγώνου γίνεται δείχνοντας ότι οι περιπτώσεις $A_K < A_T$ και $A_K > A_T$ είναι αδύνατες. Για να γίνει αυτό χρησιμοποιείται η ακόλουθη «άπειρη κατασκευή». Εγγράφουμε ένα κανονικό πολύγωνο στον κύκλο και το χωρίζουμε σε τρίγωνα. Ακολούθως κατασκευάζονται νέα τρίγωνα του ιδίου ύψους και βάσης, άρα ισεμβαδικά με τα αρχικά, τα οποία σχηματίζουν το μεγάλο τρίγωνο στα δεξιά. Το τρίγωνο έχει το ίδιο εμβαδόν με το πολύγωνο. Όσο αυξάνονται οι πλευρές του πολυγώνου, το εμβαδόν του «εξαντλεί» το εμβαδόν του κύκλου ενώ το μήκος της βάσης του τριγώνου «εξαντλεί» το μήκος της περιφέρειας του κύκλου. Σε πιο σύγχρονη αλγεβρική γλώσσα καταλήγουμε στο $A_K = A_T = \frac{1}{2}rC = \frac{1}{2}r(2\pi r) = \pi r^2$.

Το πιο πάνω θεώρημα αποδεικνύεται από τον Αρχιμήδη ($3^{\text{ος}}$ αιώνας π.Χ.) στο έργο του «Κύκλου μέτρησις». Στο ίδιο έργο ο Αρχιμήδης μελετά τον λόγο της περιφέρειας του κύκλου προς την διάμετρό του, δηλαδή τον αριθμό $\pi$. Χρησιμοποιώντας κανονικά εγγεγραμμένα και περιγεγραμμένα 96-γωνα βρίσκει ότι $3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}$. Η διαφορά των δύο φραγμάτων από την πραγματική τιμή είναι μικρότερη του $0.05\%$.