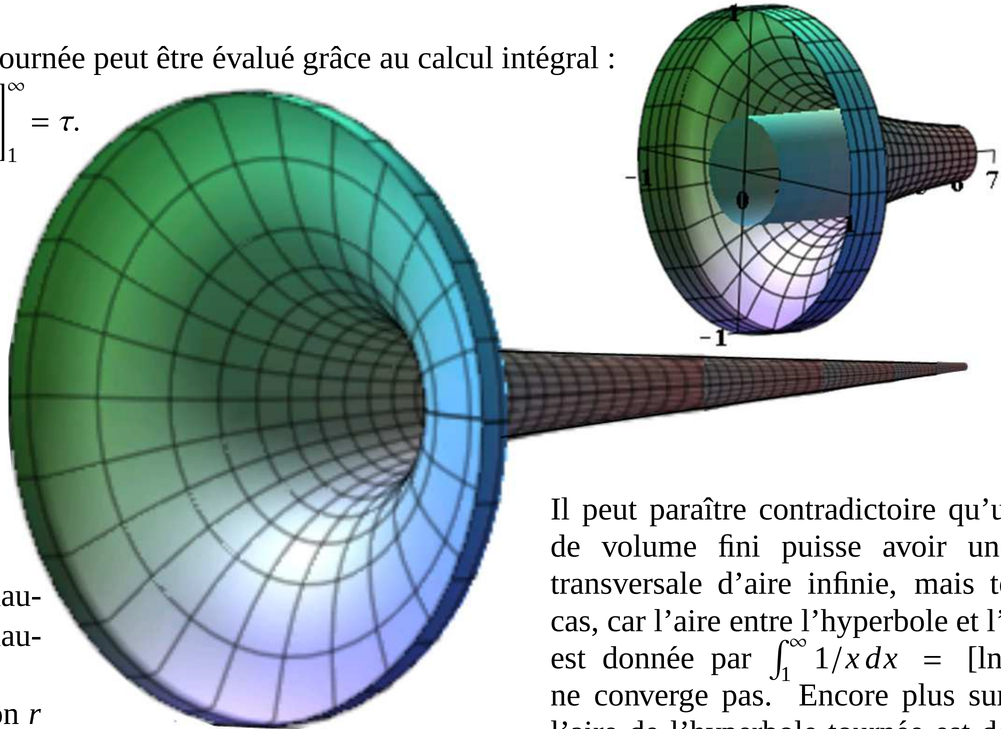
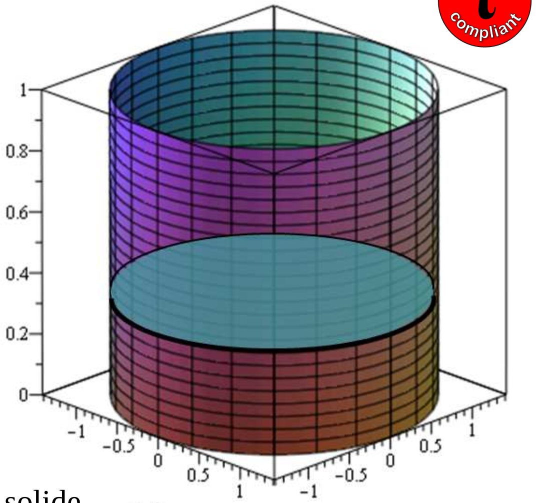
THEOREM OF THE DAY

La Trompette de Torricelli *Supposons que l'hyperbole $y = 1/x$ soit tournée par rapport l'axe des x, dans l'intervale $[1, \infty[$, par une révolution complète (τ radian) produisant ainsi un solide, auquel est ajouté un cylindre de hauteur et de rayon 1. Alors le volume total est égal à celui d'un cylindre de hauteur 1 et de rayon $\sqrt{2}$.*

Le volume du cylindre plus celui de l'hyperbole tournée peut être évalué grâce au calcul intégral :

$$\text{vol} = \frac{1}{2}\tau \times 1^2 + \frac{\tau}{2}\int_1^{\infty}\left(\frac{1}{x}\right)^2 dx = \frac{1}{2}\tau + \frac{\tau}{2}\left[-\frac{1}{x}\right]_1^{\infty} = \tau.$$

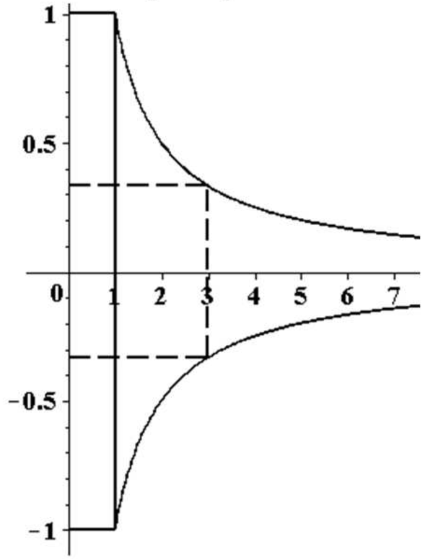




Mais le volume de ce solide a été calculé avant que Newton ou Leibniz ne soient nés, en utilisant la méthode des indivisibles. Considrons un cylindre donné, de rayon r, placé à l'intérieur du solide et qui s'étend de l'axe des y jusqu'à l'hyperbole qu'il touchera aux points $(1/r, r)$ et $(1/r, -r)$. Il possède une aire de $\tau r \times 1/r = \tau$ (on commence avec un cylindre de rayon $r = 1$). Cette aire est identique à l'aire d'un disque de rayon $\sqrt{2}$. L'image à droite montre le cas où $r = 1/3$ (en haut au centre et en bas à droite), avec le disque situé à la hauteur $1/3$ dans un cylindre de rayon $\sqrt{2}$ et de hauteur 1, comme figuré en haut à droite.

Alors, en commençant à $r = 1$, réduisons le rayon r du cylindre, par quantités infinitésimales jusqu'à $r = 0$. Les aires des surfaces des cylindres ainsi formés font, ensemble, éxactement le volume du cylindre plus celui de l'hyperbole tournée. Mais leur aire, est celle d'une infinité de disques de rayon $\sqrt{2}$, situés aux intervalles infinitésimaux le long du cylindre de hauteur 1. Les deux volumes sont ainsi identiques.

Il peut paraître contradictoire qu'un solide de volume fini puisse avoir une coupe transversale d'aire infinie, mais tel est le cas, car l'aire entre l'hyperbole et l'axe $(0x)$ est donnée par $\int_1^{\infty} 1/x\, dx = [\ln x]_1^{\infty}$ qui ne converge pas. Encore plus surprenant, l'aire de l'hyperbole tournée est donné par $\tau\int_1^{\infty}\frac{1}{x}\sqrt{1+\frac{1}{x^4}}\,dx > \tau\int_1^{\infty}\frac{1}{x}\times 1\,dx$, qui ne converge pas non plus : nous avons un volume fini encadré par une surface d'aire infinie ! Ces paradoxes apparentés sont résolus par une analyse mathématique appliquée aux objets abstraits que sont les nombres réels et les fonctions définies dessus mais ils restent déroutants lorsqu'on les imagine dans le monde matériel.



La méthode des indivisibles, souvent connue comme le *principe de Cavalieri*, fait une correspondance entre les sections transversales planes d'un solide de volume connu et celles d'un solide de volume inconnu. Evangelista Torricelli (1608-1647) a hardiment et ingénieusement étendu la méthode aux sections transversales non planes (pour enlever tout doute il en a fait une seconde démonstration dans le style classique d'Euclide). Des calculs similaires avec des formes infinies mais planes ont été faits plus tôt, y compris par Nicolas Oresme au 14e siécle, mais la publication de 1644 de Torricelli, émanant de l'école de Galilée, l'a fait connaître partout en Europe et a provoqué un tollé philosophique.

Web link: accromath.uqam.ca/2018/02/les-indivisibles-et-apres/.

À lire : *Le Beau Livre des Maths* by Clifford Pickover, Dunod, 2019.