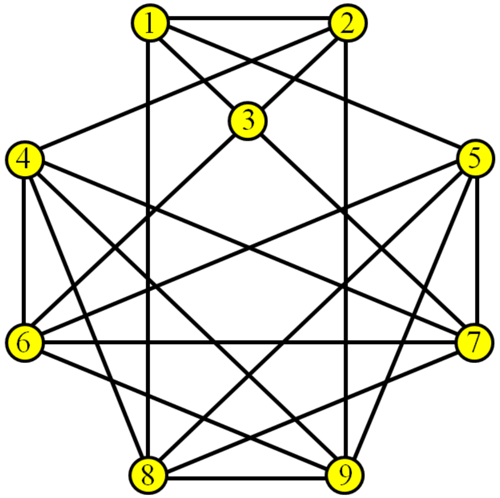
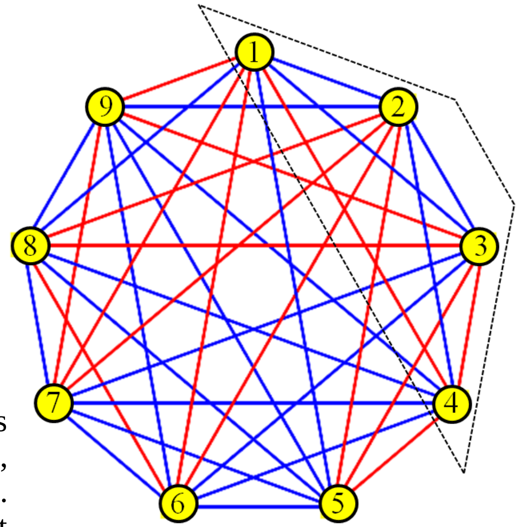
THEOREM OF THE DAY

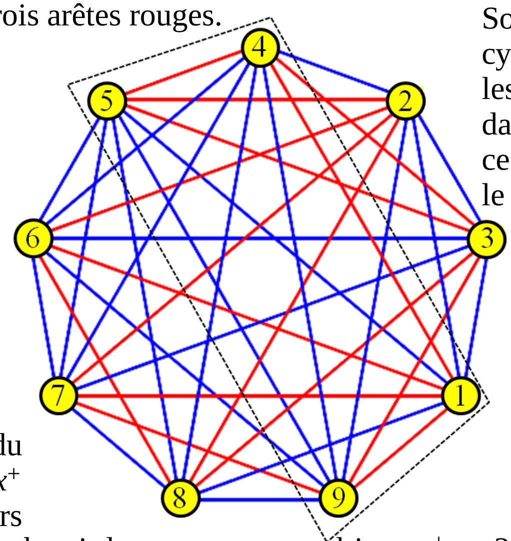
Le Théorème d’Ore en Théorie des Graphes *Soit G un graphe (simple et connexe) ayant $3 \leq n$ sommets. Si pour tout couple de sommets non-adjacents la somme de leurs degrés est $\geq n$, alors G possède un cycle hamiltonien.*



Le graphe montré à gauche, a $n = 9$ sommets, avec les sommets 1, 2 et 3 ayant degré (nombre d’arêtes incidents) égale à 4 alors que tous les autres sommets ont degré 5. Chaque couple de sommets non-adjacents a une somme de degrés égale à 9 (e.g. sommets 3, 4) ou 10 (e.g. sommets 4, 5). L’hypothèse du théorème est alors vérifiée et il existe un cycle hamiltonien (une séquence fermée d’arêtes telle que chaque sommet y apparaît exactement une fois).



Une démonstration élégante, dû à J.A. Bondy, se traduit en algorithme qui trouve un cycle hamiltonien: prenons d’abord K_n, le graphe complet à n sommets, et représentons G comme sous-graphe en colourant en bleu un sous-ensemble de ses arêtes, et en rouge les autres arêtes, comme le montre le deuxième dessin. Or, K_n a évidemment un cycle hamiltonien: dans notre dessin nous pouvons choisir le cycle ‘exterieur’. Si toutes ses arêtes sont bleues c’est terminé. Mais dans notre cas, il y a trois arêtes rouges.

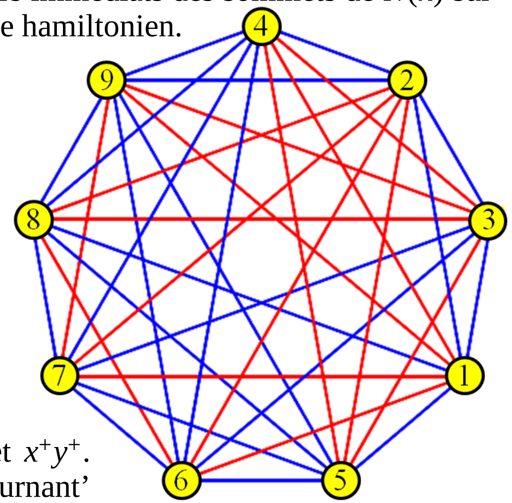


Soit xx^+ la première arête rouge sur notre cycle hamiltonien. Soient $N(x)$ et $N(x^+)$ les voisinages de, respectivement, x et x^+ dans G, et soit $N^+(x)$ l’ensemble des successeurs immédiats des sommets de $N(x)$ sur le cycle hamiltonien.

Dans notre exemple (deuxième dessin) nous avons $xx^+ = 34$, avec $N(3) = \{1, 2, 6, 7\}$, $N(4) = \{2, 6, 7, 8, 9\}$ et $N^+(3) = \{2, 3, 7, 8\}$. Notons que $N(x^+) \cap N^+(x) \neq \emptyset$. Cela doit être le cas! Car supposons que $N(x^+)$ n’inclut aucun des sommets de $N^+(x)$. Alors,

$$|N(x^+)| \leq n - 1 - |N^+(x)| = n - 1 - |N(x)|.$$

Mais ceci implique que $|N(x)| + |N(x^+)| < n$ en contradiction avec l’hypothèse du théorème. Or, supposons que $y \in N(x)$ est suivi par $y^+ \in N(x^+) \cap N^+(x)$. Alors, xx^+ et yy^+ sont des arêtes du cycle hamiltonien dont au moins une de couleur rouge, alors que xy et x^+y^+ sont des cordes du cycle, toutes les deux colorées bleues. Dans le graphe ci-dessus, nous prendrions $y^+ = 2 \in N(4) \cap N^+(3) = \{2, 7, 8\}$, et le cadre pointillé clôture $xx^+ = 34$, $yy^+ = 12$, $xy = 31$ et $x^+y^+ = 42$.



Et nous pouvons maintenant augmenter le nombre d’arêtes bleues sur notre cycle hamiltonien: remplaçons xx^+ et yy^+ par xy et x^+y^+. Le resultat pour notre exemple est montré ci-dessus à droite (le nouveau cycle hamiltonien a été retenu comme cycle extérieur en ‘retournant’ le K_n par rapport de l’arête 23). Une nouvelle arête rouge du cycle, 19, est alors choisi. Le même processus comme avant l’associe avec l’arête 54 qui est, fortuitement, la seule arête rouge du cycle qui reste. Alors, léchange darêtes qui sensuit enlève les deux arêtes rouges du cycle et produit ansi le cycle hamiltonien recherch (à l’extrême droite).

Oystein Ore a publié ce resultat classique dans une note d’une page en 1960, en generalisant un théorème de Gabriel Dirac de 1952: *hamiltonicité d’un graphe à n sommets est garantie par un degré minimum d’au moins de $n/2$* (notons que cette hypothése plus forte n’est pas verifié pour le graphe de notre exemple). Un théorème surprenant et influent de Adrian Bondy (1971) a renforcé à son tour la conclusion d’Ore: *sauf pour les graphes bipartis complets et réguliers, pas seulement hamiltonicité mais même pancyclicité (un cycle de chaque longeur ≥ 3) est impliquée.* Ce q’on peut verifier pour notre exemple.

merci à J.A.B.

Lien externe: scholar.rose-hulman.edu/rhumj/vol1/iss1/6/ (en anglais)

A lire: *Graphs and Digaphs* by Gary Chartrand, Linda Lesniak and Ping Zhang, Chapman and Hall/CRC, 5th Edition, 2010.

Created by Robin Whitty for www.theoremoftheday.org