Une occasion manquée

Note sur l'intuition de la dialectique dans l'intuitionnisme de Brouwer[1]

Olivier Keller, juin 2020.

Sommaire

Sauf mention du contraire, les citations de Brouwer proviennent du recueil de textes réunis, traduits et présentés par Jean Largeault : *Intuitionnisme et théorie de la démonstration,* Vrin, 1992. Elles sont notées Br 19 - - et les pages indiquées sont celles du recueil de Largeault.

Br 1909 : *Het Wesen der Meetkunde* (La nature de la géométrie).
Br 1912 : *Intuitionnisme et formalisme*, discours d'ouverture à l'Université d'Amsterdam.
Br 1923 : *Über die Bedeutung des Satzes vom ausgeschlossenen Dritten in der Mathematik, insbesondere in der Funktionentheorie* (Sur le rôle du principe du tiers exclu dans les mathématiques, spécialement en théorie des fonctions), J.f.r.u. angew. Math., 154, 1-7.
Br 1927 : *Über Definitionsbereiche von Funktionen* (Sur le domaine de définition des fonctions), Math. Annal., 97, 60-67.
Br 1929 : *Mathematik, Wissenschaft und Sprache* (Mathematique, science et langage), Monatshefte für Mathematik, 36, 153-164.
Br 1930 : *Die Struktur des Kontinuums* (La structure du continu), Gistel, Vienne.
Br 1947 : *Richtlijnen des intuitionistischen wiskunde* (Principes directeurs de la mathématique intuitionniste), Kon. Ned. Akad. Wet. Amsterdam, Proc. Sect. Sci., 50, 339.
Br 1948 : *Consciousness, Philosophy, and Mathematics* (Conscience, philosophie et mathématique), Proc. of the 10th International Congress of Philosophy, Amsterdam, 1, Fasc 2, 1235-1249.
Br 1948*a* : *Essentielle-negatieve eigenschappen* (Propriétés essentiellement négatives), Kon. Ned. Akad. Wet. Amsterdam, Proc. Sect. Sci., 51, 963-964.
Br 1952 : *Historical Background, Principles and Methods of Intuitionism* (Base historique, principes et méthodes de l'intuitionnisme), South Afr. Journ. of Science, 139-146.
Br 1955 : *The Effect of Intuitionism on Classical Algebra of Logic* (L'effet de l'intuitionnisme sur l'algèbre classique de la logique), Proc. of the Royal Irish Academy, 57, 113-116.

[1] Je remercie Stephan Neuwirth pour ses annotations critiques d'une première version de ce texte.

Présentation

La réaction de Brouwer à la crise des fondements est peut-être la plus intéressante parmi toutes les réactions de mathématiciens ou de logiciens. Il ne s'agit pas pour lui de fabriquer une axiomatique en posant des interdits, un lit de Procuste pour une théorie déjà développée, mais de proposer un *édifice complètement nouveau* ; non pas de se retrancher derrière des montages de signes vides de sens, mais de rechercher le fondement dans une activité humaine, et donner par conséquent sa place au sein même des mathématiques *au « sujet créateur », donc d'une certaine façon à l'histoire* ; non pas de tenter de régresser jusqu'à des éléments premiers purement logiques, mais de *critiquer la logique traditionnelle elle-même* parce que, nous dit Brouwer, cette logique provoque l'illusion de l'omniscience. Ce qui vient en premier, selon lui, ce ne sont pas des *éléments* — objets, axiomes ou postulats *posés* —, mais une *intuition active*, comme nous le verrons. Il est nécessaire, dit-il, de reconnaître le primat de la construction, de l'activité réelle, par opposition à l'existence d'entités découlant du principe du tiers exclu et à la sèche déduction à partir de ces supposées entités ; par opposition aussi à l'existence d'entités simplement *posées* a priori, comme l'ensemble des parties d'un ensemble.

Développement d'une activité humaine qui ne consiste en rien d'autre qu'en *constructions* intellectuellement « palpables », histoire : autant de façons d'introduire le mouvement, donc le changement, non seulement en tant que *point de vue sur* les mathématiques, mais *à l'intérieur même* des mathématiques, et ceci par la considération d'entités qui ne sont pas forcément déterminées d'avance, comme dans les mathématiques classiques, mais *en cours* de détermination dans l'esprit du « sujet créateur ». Mais en changeant, une entité *se* change, elle devient autre qu'elle-même ; c'est donc de dialectique, au sens d'unité des contraires, qu'il s'agit de fait, même si ce n'est jamais explicite chez Brouwer. C'est cette tentative totalement inédite[2] d'introduire de fait, sinon en droit, la dialectique, qui suggère de qualifier la réaction de Brouwer à la crise comme la plus intéressante de toutes.

Hélas, cette tentative prometteuse est mort-née. Non pas qu'il soit faux de placer l'unité des contraires au cœur des mathématiques ; il est seulement erroné de proposer pour cela une nouvelle mathématique et, comme certains courants sont tentés de le faire, une nouvelle logique formelle.

1- Des prémisses remarquables

En 1912, Brouwer explique que si l'intuitionnisme, sous la forme ancienne avancée par Kant, avec le temps et l'espace comme formes a priori de l'entendement, a certainement subi un désaveu en ce qui concerne l'espace avec les géométries non-euclidiennes, l'intuitionnisme a cependant pu se relever par l'abandon de l'apriorité kantienne de l'espace et le maintien d'autant plus ferme de l'apriorité du temps :

> Le néo-intuitionnisme considère la dissociation d'instants vécus en parties qualitativement distinctes, qui ne se *réunissent* qu'en restant *séparées* par le temps, comme le phénomène fondamental de l'intellect humain, phénomène qui, par abstraction de son contenu émotionnel, donne le *phénomène fondamental de la pensée mathématique, l'intuition de la dyade pure*. Cette intuition de la dyade, intuition *originaire* des mathématiques, engendre non seulement les nombres un et deux, mais aussi tous les nombres ordinaux

[2] Dans l'histoire récente, avec une telle ambition et à l'initiative d'un mathématicien de premier plan.

> finis, attendu que *l'un des éléments de la dyade peut être pensé comme une nouvelle dyade*, et que le processus s'itère indéfiniment ; en poursuivant, il engendre le nombre ordinal infini le plus petit, ω. *Finalement, cette intuition originaire des mathématiques, où s'unissent le connecté et le séparé, le continu et le discret, donne lieu immédiatement à l'intuition du continu linéaire, c'est-à-dire du « entre », qui ne se laisse pas épuiser par l'interposition de nouvelles unités, et qui ne peut donc jamais être pensé comme une simple collection d'unités.* Par ce biais, l'apriorité du temps confère la qualité de jugements synthétiques a priori non seulement aux propriétés de l'arithmétique, mais aussi à celles de la géométrie. (Br 1912, p. 43, souligné par moi)

L'intuition fondamentale, c'est donc d'une part la dyade pure — le deux pensé comme un — et d'autre part un élément de la dyade pensé comme une nouvelle dyade — le un pensé comme deux. En 1947, la formulation est « [la mathématique intuitionniste] découle par *auto-déploiement de la bi-unité* comme intuition originelle des mathématiques » (Br 1947, p. 417, souligné par moi)
Avec la dyade, le deux pensé en un, dont l'origine est selon Brouwer la synthèse a priori de deux instants distincts, on a l'unité statique des contraires ; avec l'autodéploiement de la dyade, le un qui se divise en deux indéfiniment, on a leur unité dynamique et créatrice. Brouwer proposera, nous verrons comment, de construire l'édifice mathématique avec cette dynamique-là.
Il décline ensuite cette unité contradictoire suivant divers modes — connecté/séparé, continu/discret — et passe à l'intuition (encore une !) du « entre », le continu linéaire qui, souligne-t-il, n'est pas une simple collection d'unités. Cette idée remarquable, sur laquelle nous reviendrons aussi, est plus clairement exprimée dans *La structure du continu* :

> […] l'intuition originaire [de la dyade pure] renferme la possibilité d'insérer entre deux éléments *(par la considération de la liaison comme nouvel élément)*, et partant aussi la construction, dans le continu intuitif, d'un ens d'intervalles fermés qui ne se touchent pas …. » (Br 1930, p. 277, souligné par moi).

L'unité de deux éléments est donc conçue comme un nouvel élément, à savoir leur liaison, non réductible à la représentation unilatérale d'un « remplissage » par *d'autres* éléments ; la liaison est qualitativement différente de ses deux constituants, elle est la négation de leur propre négation (exclusion) réciproque.

On le voit, les présupposés fondamentaux de Brouwer se laissent aisément traduire en langage dialectique. C'est encore plus frappant dans le passage suivant :

> *Ur-intuition of two-ness (two-ity)* : The intuitions of the continuous and the dicrete join here, as the second is thought not by itself, but under preservation of the recollection of the first. The first and the second are thus *kept together* and the intuition of the continuous consists in this keeping together (continere = keeping together). This mathematical ur-intuition is nothing but the contentless abstraction of the sensation of time. That is to say, the sensation of « fixed » and « floating » together, or of « remaining » and « changing » together. (Intervention à la *Conférence Internationale de Mathématiques*, Rome, 1908. Cité par D. van Dalen dans « The Return of the Flowing Continuum », *Intellectica*, 2009, 51, p. 138)

Les deux pôles, continu et discret, sont donc pour Brouwer inséparables et c'est leur unité qui constitue le continu véritable ; l'ensemble étant une forme de la polarité fondamentale fixe/changeant, ou fini/infini selon les termes de Hegel. Nous tâcherons de comprendre la traduction mathématique qu'en donne Brouwer.

De ces prémisses remarquables il découle ceci : il ne faut pas raisonner sur le modèle « *ou bien* continu *ou bien* discret », « ou bien fixe ou bien fluctuant », « ou bien connecté ou bien séparé », « ou bien unité ou bien dyade », en un mot « ou bien P ou bien non-P » ; tout au long de son œuvre, Brouwer le *dit* et le *pense*, par sa critique d'une application inconditionnelle du principe du tiers exclu. Mais des mêmes prémisses il découle aussi ceci : continu et discret *à la fois*, fixe et fluctuant à la fois, connecté et séparé à la fois, unité et dyade à la fois, en un mot « P et non-P à la fois » ; que les deux pôles ne puissent être posés l'un sans l'autre, Brouwer le *dit*, mais il *ne le pense pas*. Il ne fait donc que la moitié du chemin, aussi sa tentative de refondation est-elle bancale et finalement stérile, comme nous allons le constater. Stérile *en tant que tentative de refondation*, je précise bien, car il ne s'agit pas ici de nier la fécondité de l'impulsion calculatoire (constructivisme), mais seulement de relever son caractère unilatéral.

2- Le principe du tiers exclu

À titre de conséquence du primat de la construction, le refus du principe du tiers exclu est l'article essentiel de la logique intuitionniste. Si en effet un objet A n'existe que s'il est explicitement « construit », il ne suffit pas que la proposition « A n'existe pas » soit fausse pour que l'on puisse en déduire que la proposition « A existe » est vraie. Selon les termes de Brouwer, l'absurdité de l'absurdité d'une proposition n'entraîne pas la vérité de cette proposition : non-non-P n'implique pas P (la réciproque, en revanche, est admise). Par exemple, même s'il est absurde qu'un nombre réel r ne soit pas rationnel, l'intuitionnisme n'autorise pas à en déduire que ce nombre est rationnel, aussi longtemps qu'il n'est pas « construit », c'est-à-dire aussi longtemps qu'on n'a pas trouvé les entiers p et q tels que $r = p/q$.

Brouwer récuse le principe du tiers exclu à l'aide d'exemples, tous issus du même moule logique. Voici son exemple favori[3] que je résume ainsi :

> Soit k_n le rang de la décimale de π où la propriété « cette décimale est égale à 0 et est suivie de 123456789 » se produit pour la $n^{\text{ième}}$ fois. En 1923, on ne connaissait pas k_1 ; de nos jours, on connaît de k_1 à k_6, et on ignore si k_7 existe[4]. Nous adaptons donc en remplaçant k_1 par k_7, que nous noterons simplement k :
> Soit (c_n) la suite définie ainsi : pour $n < k$, on pose $c_n = (-1/2)^n$, et pour $n \geq k$, $c_n = (-1/2)^k$. On définit le réel a comme la limite de la suite (c_n). Donc si k existe, $a = (-1/2)^k$, et si k n'existe pas, $a = 0$. On voit que suivant les éventualités relatives à k, le réel a peut être < 0, > 0, ou $= 0$. Brouwer conclut de cela que le réel a n'est ni < 0, ni > 0, ni $= 0$, bien qu'il soit absurde qu'il puisse être autre chose que négatif, positif ou nul. De plus, faute de constructivité (on ne peut pas expliciter les entiers p et q tels que $a = p/q$), a n'est pas rationnel, quoique son irrationnalité soit absurde.

À l'aide du même k, Brouwer fabrique (Br 1923, p. 201) une fonction définie et continue sur [0, 1], mais qui n'a pas de maximum : ainsi tombe un résultat basique de l'analyse. Dans *Mathématique, science, et langage* (Br 1929, p. 258), en s'appuyant sur la forme générale de l'exemple ci-dessus (mais cela marche très bien en prenant l'exemple tel quel), qu'il appelle propriété évanouissante, d'autres résultats de l'édifice classique s'effondrent :

- deux droites données du plan euclidien ne sont ni sécantes ni parallèles ; elles ne sont pas

[3] Br 1923, p. 200.
[4] *Wolfram MathWorld*, article « Pi Digit ».

sécantes, bien qu'il ne soit pas absurde qu'elles le soient ; elles ne sont pas parallèles, bien que leur parallélisme ne soit pas absurde.

- le théorème de Jordan sur les courbes fermées simples est caduc : on peut en effet exhiber un point P qui n'est ni intérieur ni extérieur ni sur la frontière du carré unité du plan. Il n'est pas à l'intérieur du carré unité, bien qu'il ne soit pas absurde qu'il le soit, et de même pour les autres propriétés.

Bien d'autres résultats classiques sont ainsi réfutés, mais nous pouvons arrêter là, nous avons compris la méthode. Méthode inédite dans le monde mathématique[5], motivée par le désir d'introduire quelque chose comme un mouvement historique dans une définition mathématique ; Brouwer espère mettre sous nos yeux une construction *en cours*, et qui contredise le principe du tiers exclu. Mais celui-ci est-il vraiment contredit ?

Il est question en effet du traitement logique d'une propriété P, comme par exemple « la limite a de la suite (c_n) est égale à 0 ». Le mathématicien classique affirme :

$$\textit{on a } (P \text{ ou } \neg P)$$

tandis que l'intuitionniste dit :

$$\textit{on ne peut avoir autre chose que } (P \text{ ou } \neg P),$$

i.e. on a $\neg\neg(P \text{ ou } \neg P)$, mais faute de preuve ou de construction de l'une des alternatives, on ne peut affirmer (P ou $\neg P$).

Le principe du tiers exclu est donc davantage mis de côté que réellement récusé, mis de côté en attendant une éventuelle preuve de P ou de $\neg P$. En supposant même que cette preuve ne puisse jamais être fournie, l'incertitude qui en résulte ne sort pas du cadre de pensée qu'impose le principe du tiers exclu : car si l'intuitionnisme le refuse *comme méthode de démonstration* (refus de « $\neg\neg A \to A$ »), en acceptant $\neg\neg(P \text{ ou } \neg P)$ il l'admet tout de même *comme « horizon » indépassable*.

Par ailleurs, ce principe est accepté dans le cas de « systèmes finis » (Br 1923, p. 198), ainsi que pour les propositions que Brouwer appelle « négatives », c'est-à-dire des propositions exprimant l'absurdité d'une proposition (Br 1948, p. 436). Preuve de Brouwer en abrégé :

> Soit une proposition a négative, i.e. telle que $a = \neg b$. Comme $q \to p$ implique $\neg p \to \neg q$, et que $b \to \neg\neg b$, on en déduit que $\neg\neg\neg b \to \neg b$, c'est-à-dire que $\neg\neg a \to a$. (Id.)

On le voit, Brouwer n'a pas vraiment récusé le principe du tiers exclu, … lequel mérite pourtant une sévère mise en accusation :

[5] Que tous les intuitionnistes n'acceptent pas. Même son élève Heyting exprime des doutes. Dans son ouvrage *Intuitionism. An introduction*, North-Holland, 3e éd., 1971. p. 119, un contradicteur l'interpelle :

« This does not sound like a mathematical definition. Can a sequence of rational numbers be considered as mathematically well-defined if its components depend upon material facts, such as the existence at a given moment of a proof for a certain proposition ? »

Ce à quoi Heyting répond :

« I agree to this objection ; and, indeed, I doubt whether it is advisable to adopt such definitions as mathematical […]. »

- il peut peut donner lieu à des absurdités, comme « tout nombre entier est soit de couleur rouge soit d'une autre couleur que rouge. »

- il peut être faux, dans le sens où la négation d'une négation n'est généralement pas le retour au point de départ. Exemple banal : le naturel 3 est « nié » en -3, et la négation de cette négation -(-3) n'est pas le retour au 3 naturel. Dans **N**, -(-3) n'aurait en effet aucun sens, et par l'indispensable magie mathématicienne *d'identification* de 3 et de -(-3), qui n'a un sens que dans **Z**, il y a un *changement qualitatif* de 3, qui passe du statut d'élément d'un monoïde à celui d'élément d'un groupe. Sous un angle plus large, **Z** est défini par (**N** x **N**)/R, avec la relation d'équivalence R adéquate, puis on « identifie » deux choses qualitativement différentes, **N** et (**N** x {0})/R, c'est-à-dire le naturel m avec la classe de $(m, 0)$, ce qui fait *apparaître* **Z** comme une simple extension de **N** et la classe de $(m, 0)$ comme un simple retour au naturel m.

- il peut être faux et entraîner dans sa chute le principe de contradiction lui-même.
Pour le voir, en souvenir du réel a ci-dessus, qui ne peut être que > 0, < 0, ou = 0, considérons la proposition :

E : « a est un élément quelconque de l'ensemble $\{0, x, y\}$, où $x > 0$ et $y < 0$ »

Alors a n'est ni = 0, ni < 0, ni > 0, sinon il ne serait pas un élément *quelconque* de $\{0, x, y\}$. Mais a est ou bien 0, ou bien < 0, ou bien > 0, sinon il ne serait pas un *élément* de $\{0, x, y\}$. Le concept d'« élément quelconque », l'âme de toute déduction mathématique, exprime donc une contradiction, et une contradiction indispensable. L'expression E ci-dessus rend vraies les deux propositions contradictoires :

P : « a n'est ni 0, ni < 0, ni > 0 »
non-P : « a est ou bien 0, ou bien < 0, ou bien > 0 »

Brouwer a posé partiellement P ; il n'a pas reconnu que non-P est également vraie, donc que le principe de contradiction, lui aussi, est faux. Dans sa critique de la logique classique, il n'a fait que la moitié du chemin. La vérité dialectique cachée derrière le montage (inutilement) alambiqué de Brouwer est pourtant fort simple et spontanément pratiquée dès les premiers apprentissages en mathématiques. Sous sa forme générale, on peut l'énoncer comme suit :

> Soit $E = \{a, b, c, \ldots\}$. Un élément *quelconque* x de E est par définition indéterminé, dans le sens où sa seule détermination est le fait d'être élément de E. On peut malgré tout le *saisir*, le manipuler, et le conduire éventuellement à une détermination ; c'est le ε de Hilbert[6], qu'il qualifie de fonction de choix, c'est aussi le τ de Bourbaki[7]. Remarquons en passant que *saisir* x en tant qu'élément quelconque n'est pas le *choisir*, car choisir un élément présuppose de le distinguer des autres ; par suite, qualifier ε et τ de « fonctions de choix » est source de confusion, tandis que « fonction de préhension » serait une expression plus appropriée.

---

[6] « ε assume le rôle de fonction de choix, i.e. dans le cas où A est vraie de plusieurs objets, ε(A) est *un quelconque* parmi les objets *a* dont A est vraie. » (Hilbert, *Les fondements des mathématiques*, 1927, p. 148 du recueil de Largeault)

[7] « L'introduction du signe logique τ et des critères qui en gouvernent l'emploi nous a dispensés d'avoir à formuler ici un « axiome de choix » pour légitimer cette opération. » *Théorie des ensembles*, E II.34.

La réalité contradictoire s'énonce sous deux formes :

- l'ensemble E est ses éléments (axiome d'extensionnalité) : E est une « pluralité une »
- r est un élément quelconque de E : r est un « un pluriel ».

Telle est la réalité objective évidente. Essayer de formaliser cette dialectique en fabriquant de nouveaux axiomes et règles de déduction serait un contre-sens, qui ne pourrait avoir pour résultat que des « usines à gaz » : la dialectique est en effet parfaitement lisible dans la forme mathématique standard. Il ne s'agit donc pas de *défaire* la formalisation classique, mais de *prendre conscience* de sa dialectique, et par là de *prendre conscience de ce que l'on fait*, tout simplement. Prise de conscience semble-t-il encore très embryonnaire, et dont le résultat espéré est double : d'une part *éclairer* la pratique mathématique courante et par là-même les éventuelles difficultés d'ordre didactique ; et d'autre part en finir avec la crise des fondements. C'est d'une *pratique consciente* dont nous avons besoin, et non d'une nouvelle technique. C'est un peu la mise en garde de Wittgenstein :

> Il ne s'agit pas d'édifier un nouveau monument ni de construire un nouveau pont, mais de décrire la géographie telle qu'elle est *maintenant*.
> […]
> C'est pourquoi en philosophie des mathématiques, il ne sert à rien de remodeler les preuves en de nouvelles formes. Bien qu'ici la tentation soit forte. (*Remarques sur les fondements des mathématiques*, 5^{e} partie (1942-1944), 52, Gallimard, 1983, p. 252)

3- Le continu linéaire. Déploiements, espèces et suites de choix libres

Un exemple type du continu linéaire mathématique est l'ensemble des nombres réels de l'intervalle [0, 1], et il est classiquement défini comme l'ensemble des classes de suites de Cauchy équivalentes de nombres rationnels compris entre 0 et 1. On démontre que [0, 1] est « complet », au sens où toute suite de Cauchy des réels ainsi définis est encore un réel. Il est de ce fait « connexe », c'est-à-dire « sans trou », au sens où il est impossible de scinder]0, 1[en deux sous-ensembles ouverts complémentaires. Un exemple d'ensemble non connexe est précisément celui des rationnels de]0, 1[; en effet, puisqu'il n'existe par exemple aucun rationnel dont le carré est égal à 1/2, on peut scinder cet ensemble en deux sous-ensembles ouverts, à savoir les rationnels dont le carré est strictement inférieur à 1/2, et ceux dont le carré est strictement supérieur à 1/2.

Cela ne convient pas à un intuitionniste. Objection centrale : il est incorrect de définir un ensemble par une propriété, en l'occurence la propriété « être une suite de Cauchy de rationnels ». Un « classique » approuverait cette objection, sinon dans le cas d'espèce, du moins dans son principe, dans la mesure où l'on s'est aperçu, depuis la reformulation par Russell du « menteur », que définir un ensemble par une propriété peut conduire à un paradoxe. Pour un « classique », dit Brouwer :

> le seul argument valide opposable à l'introduction d'un nouvel ensemble est qu'elle conduit à une contradiction ; en effet la seule modification que la découverte des paradoxes a provoquée dans la pratique du formalisme a été l'abolition des ensembles qui avaient engendré les paradoxes. (Br 1912, p. 48)

L'objection centrale intuitionniste est beaucoup plus profonde, en ce qu'elle n'admet pas d'ensemble *sans éléments prédéfinis*. L'existence des éléments doit précéder le concept de leur totalité (l'existence précède l'essence). Aussi Brouwer, après avoir employé comme tout le monde le terme d'ensemble, préfèrera-t-il parler d'*espèce* (species) :

> c'est-à-dire de propriétés attribuables à des entités mathématiques *déjà acquises* […] Les entités mathématiques *déjà acquises* pour lesquelles la propriété est réalisée s'appelleront éléments de la species. (Br 1952, p. 452, souligné par moi)

L'élément d'abord, en tant qu'entité mathématique acquise, donc constructivement déterminée, et l'espèce ensuite. Or la logique de Brouwer permet, nous l'avons vu, de fabriquer des réels rien moins qu'*acquis*, comme le a que nous connaissons (§2) qui n'est ni < 0, ni > 0, ni $= 0$. Par conséquent, même le banal [0, 1] n'est pas une espèce. Et comme il faut bien tout de même en parler, l'intuitionnisme le fera dans ces termes :

> If a and b are real numbers, the closed interval $[a, b]$ is the species of real numbers x such that it is impossible that $x > a$ and $x > b$, and also impossible that $x < a$ and $x < b$.
> *Note*. The definition must be given in this complicated form because it may happen that we do not know which of a, b, is the greater. (Heyting, *ouvrage cité*, p. 40)

L'intervalle [0, 1] est donc l'espèce des réels x tels que « $x < 0$ ou $x > 1$ » est absurde, ou encore, selon les termes de Brouwer, l'espèce des réels x tels qu'on ait l'absurdité de l'absurdité de « $0 \leq x \leq 1$ ». Et comme nous le savons, si l'on refuse le principe du tiers exclu, non-non-P n'implique pas P, l'absurdité de l'absurdité de « $0 \leq x \leq 1$ » n'entraîne pas « $0 \leq x \leq 1$ ».

Dans ces conditions, définir la continuité de l'intervalle [0, 1] paraît une tâche impossible. En premier lieu, il semble insensé de qualifier d'entité mathématique *déjà acquise* un nombre x dont on sait seulement qu'il ne peut pas ne pas être compris entre 0 et 1, et qui est donc tout sauf *construit*. Ensuite, s'il est vrai que deux réels donnés peuvent être ni égaux ni différents, toute relation d'ordre paraît exclue, et par conséquent exclue aussi toute possibilité de donner un sens à l'expression « suite de Cauchy de nombres réels » : *exit la complétude*. Enfin, si l'on peut fabriquer un réel qui n'est ni <, ni >, ni égal à un réel donné r, la disjonction de [0, 1] entre $[0, r[$ et $[r, 1]$ est privée de sens : *exit la connexité*.
Eh bien, après des années de réflexion, Brouwer a réussi le tour de force de donner une cohérence à tout cela au moyen d'une reconstruction du continu qui fait table rase du passé « classique ».

Voici comment.

Il faut d'abord définir constructivement l'intervalle [0, 1]. Le définir comme l'espèce des nombres réels ayant telle et telle propriété est insuffisant pour l'intuitionnisme, nous le savons, puisqu'avant de les rassembler en une espèce, il faut les avoir construits. À cet effet, Brouwer avance l'idée très séduisante de *spread*, terme que Heyting traduit en français par *déploiement*. Conformément à sa philosophie générale, l'idée que Brouwer veut concrétiser avec les déploiements est la *génération* des êtres mathématiques à partir de l'intuition originelle de la suite des entiers naturels, elle-même issue, comme nous le savons, de la dyade originelle, issue à son tour de l'intuition du temps.

Un déploiement est dans un premier temps une sorte d'« arbre » d'entiers naturels, c'est-à-dire un ensemble de suites finies $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ de naturels qui obéissent à une certaine loi d'admission L telle que : pour chaque naturel p, L détermine si p est ou n'est pas admissible comme le premier

élément d'une suite du déploiement ; pour toute suite admise (a_1, a_2, …, a_n), la loi L détermine pour chaque entier p si la suite (a_1, a_2, …, a_n, p) est admissible ou non ; toute suite admise (a_1, a_2, …, a_n) est la « descendante » de la suite admise (a_1, a_2, …, a_{n-1}).
Dans un deuxième temps on « habille » l'arbre avec des entités mathématiques. Par exemple (Heyting, *ouvrage cité* p. 36), comme les rationnels sont dénombrables, on peut les énumérer en r_1, r_2, …, r_n, … . On impose la loi suivante : tout entier est admis comme premier élément, et la séquence d'entiers (a_1, a_2, …, a_n) étant admise, la séquence (a_1, a_2, …, a_{n+1}) sera admise si et seulement si $|r_{a_n} - r_{a_{n+1}}| \leq 2^{-n}$.
L'habillage consiste à associer à chaque (a_1, a_2, …, a_n) admise par la loi le rationnel r_{a_n}. Autrement dit chaque branche infinie a_1, (a_1, a_2) …, (a_1, a_2, …, a_n), …. du déploiement est associée à la suite de Cauchy des rationnels $r_{a_1}, r_{a_2}, \dots, r_{a_n}, \dots$.

Arrivé à ce point, on pourrait penser qu'à part une présentation tarabiscotée de la définition habituelle des réels comme suites de Cauchy de rationnels, il n'y a rien d'original dans la démarche de Brouwer. En réalité, l'originalité est celle-ci : la construction étant partie prenante de l'objet construit — l'échafaudage fait partie de l'édifice —, et comme il y a plusieurs constructions possibles pour un même réel, celui-ci doit être saisi complètement, dans sa multiplicité de constructions. Aussi le déploiement ci-dessus ne définit-il pas à proprement parler des points de la droite réelle, mais des *noyaux de points*. Pour employer des termes « classiques », un point de la droite réelle (resp un réel) au sens intuitionniste est moins tel objet isolé quelconque sur la droite (resp dans R), qu'un noyau, c'est-à-dire la classe des suites de Cauchy de rationnels qui « coïncident[8] » avec une suite déterminée.

On voit l'importance de cette conception — le point inséparable de la classe de ses générateurs au lieu du point « tout nu » classique — dans la définition d'une fonction par Brouwer :

> Par fonction réelle ou brièvement une fonction $f(x)$ de x, nous entendons une loi qui *à certains noyaux de points* désignés par ξ et constituant le domaine de définition de cette fonction, *associe chaque fois un noyau de points* du continu linéaire que l'on désignera par $\eta = f(\xi)$. (Br 1927, p. 231, souligné par moi)

Définition capitale, puisqu'il en découle qu'une fonction « totale », i.e. une fonction dont le domaine coïncide avec le continu unité, possède la propriété suivante : étant donné qu'il ne s'agit pas de correspondance de point à point, mais de noyau à noyau, à toute suite de rationnels qui converge vers x correspond une suite de rationnels qui converge vers $f(x)$. Ce n'est pas encore la continuité, puisqu'il faudrait pour cela étendre la remarque précédente à des suites de réels quelconques, extension inadmissible pour un intuitionniste. Comment, malgré tout, Brouwer montre non seulement la continuité mais la continuité uniforme de toute fonction « totale », c'est ce que nous verrons plus loin.

Heyting (*ouvrage cité*) présente les choses de la façon suivante :

- une suite de Cauchy de rationnels est un *générateur de nombre réel* (*real number-generator*)
- deux générateurs *coïncident* si leurs termes sont arbitrairement proches à partir d'un certain

[8] Deux suites sont dites « coïncider » si leurs termes sont arbitrairement proches à partir d'un certain rang, et donc (classiquement) si elles ont la même limite.

rang. (p. 16)
- l'espèce des générateurs qui coïncident avec un générateur donné est appelée un *nombre réel*. Si x est un réel et si le générateur ξ est l'un de ses éléments, on dit que ξ représente x et aussi que ξ coïncide avec x. (p. 37)
- tout nombre réel coïncide avec un nombre générateur canonique, i.e. une suite $(x_n 2^{-n})$ de fractions dyadiques telles que $|x_n 2^{-n} - x_{n+1} 2^{-n-1}| \leq 2^{-n-1}$ (p. 41-42).

Il résulte de la définition d'un réel par Heyting que comme pour Brouwer, une fonction de variable réelle n'envoie pas, comme cela se fait en analyse classique, un réel « tout nu » vers un réel « tout nu », mais une espèce de suites coïncidantes (un noyau) vers une espèce de suites coïncidantes (un noyau).

Cela ne suffit toujours pas. Le coup de force le plus radical reste à venir. Selon Brouwer ce qui précède reste encore, au fond, dans le cadre de ce qu'il nomme « l'ancien intuitionnisme » de Poincaré et de Borel, comme il l'explique en 1930 dans un texte capital :

> Pour le développement de la mathématique qui dépasse la théorie des nombres naturels, l'ancienne école intuitionniste emploie essentiellement la logique classique. Moyennant l'axiome de compréhension, elle commence par créer le continu (archimédien) en tant qu'espèce des espèces de sous-espèces convergentes « cohérentes » de nombres rationnels, ou bien comme espèce des espèces de suites fondamentales convergentes « cohérentes » de nombres rationnels, ou finalement en tant qu'espèce des coupures de rationnels de Dedekind. (Br 1930, p. 273)

L'intuitionnisme ancien (aussi bien que l'analyse classique, d'ailleurs) définit donc selon Brouwer des espèces moyennant l'axiome de compréhension des ensembles, c'est-à-dire moyennant une propriété : « être une coupure », ou bien « être une espèce de suites fondamentales (= de Cauchy) cohérentes (= coïncidant avec une suite fondamentale donnée) », ou bien « être une espèce de suites fondamentales de rationnels dont chacune coïncide avec une suite fondamentale de décimaux (ou de fractions dyadiques, par exemple) ».
Le texte poursuit :

> Dans ces procédés d'engendrement du continu (procédés tenus pour équivalents), il faut déjà *doter la logique d'un pouvoir créateur extramathématique (i.e. qui va au delà du constructif),* car des trois espèces mentionnées qui représentent le continu, *seule une sous-espèce « dénombrable-inachevée » se laisse produire constructivement par des opérations de pensée mathématiques* ; or une telle sous-espèce est insuffisante pour toutes les théories mathématiques qui emploient un concept de mesure, car *les sous-espèces dénombrables-inachevées du continu (ou de l'espace à n dimensions) sont de mesure linéaire (ou n-dimensionnelle) nulle*. (*id*., souligné par moi)

Et puisque le continu n'est pas dénombrable :

> Dans la théorie intuitionniste, l'espèce des espèces de suites fondamentales cohérentes de nombres rationnels ne forme qu'une partie du continu, et elle sera désignée comme le *continu réduit* superposé au système des nombres rationnels (ou équivalemment au système des fractions dyadiques ou respectivement des fractions décimales finies). (*id*., p. 274)

Nous voici enfin parvenus au moment décisif : comme jusqu'ici, seul un *continu réduit* a été construit, il faut introduire le *continu total* :

> Afin d'obtenir dans la théorie intuitionniste le *continu unité total* superposé aux rationnels unitaires bornés [i.e. non négatifs et non supérieurs à 1] (resp aux fractions décimales finies), il est nécessaire d'introduire, en plus des « éléments achevés » du continu réduit, des « éléments inachevés ». *Pour cela nous admettons, à côté des suites fondamentales convergentes de rationnels unitaires bornés, des suites convergentes engendrées par libres choix de tels rationnels*. (*id.*, p. 275, souligné par moi)

Nous y sommes : *c'est la liberté de choix des éléments des suites, censée produire des « éléments inachevés », qui caractérise le passage au continu total*. Il s'agit là de la thèse centrale « positive » de Brouwer, par opposition à sa thèse « négative » de refus du principe du tiers exclu, comme il le souligne lui-même :

> L'intuitionnisme intervint par deux actes, dont le premier [pour l'essentiel : contestation du principe du tiers exclu] semble fatalement devoir conduire à des conséquences destructives et stérilisantes ; mais ensuite le second acte ouvre de larges possibilités à un redressement et à de nouveaux développements (Br 1952, p. 449).
> […]
> Le second acte de l'intuitionnisme crée la possibilité d'introduire le continu intuitionniste comme *l'espèce des suites infinies procédant d'une façon plus ou moins libre et convergentes de nombres rationnels.* (*id.*, p. 452, souligné par moi)

« Plus ou moins libre », cela veut dire que le choix des termes de la suite :

> peut être entièrement libre aussi longtemps que le sujet créateur le désire mais que cette liberté peut à une étape quelconque être complètement suspendue, que ce soit dès le début ou bien à partir d'un rang quelconque, par une loi qui fixe d'avance tous les autres termes.
> […]
> Enfin toutes ces interventions, conformément au second acte de l'intuitionnisme, peuvent être rendues dépendantes des possibles expériences mathématiques futures du sujet créateur (*id.*, p. 453).

Reste à comprendre comment le continu est engendré par ces suites de choix « plus ou moins libres », d'une façon compatible avec l'exigence constructiviste. L'infini dénombrable, du point de vue intuitionniste, n'est pas une entité achevée, mais seulement potentielle, en perpétuelle gestation[9] : un pas après l'autre, sans arrêt. Il est représentable par un déploiement à une seule branche (a_1, a_2, …, a_n, …). L'infini non dénombrable est encore moins, si l'on peut dire, une entité achevée, et sa représentation par Brouwer est une généralisation de celle de l'infini dénombrable : non pas « un pas après l'autre », comme pour le dénombrable, mais « plusieurs pas possibles après un pas donné », d'où le modèle du « déploiement ».
Rappelons l'exemple que nous avons donné plus haut : partant d'un listage donné des rationnels,

---

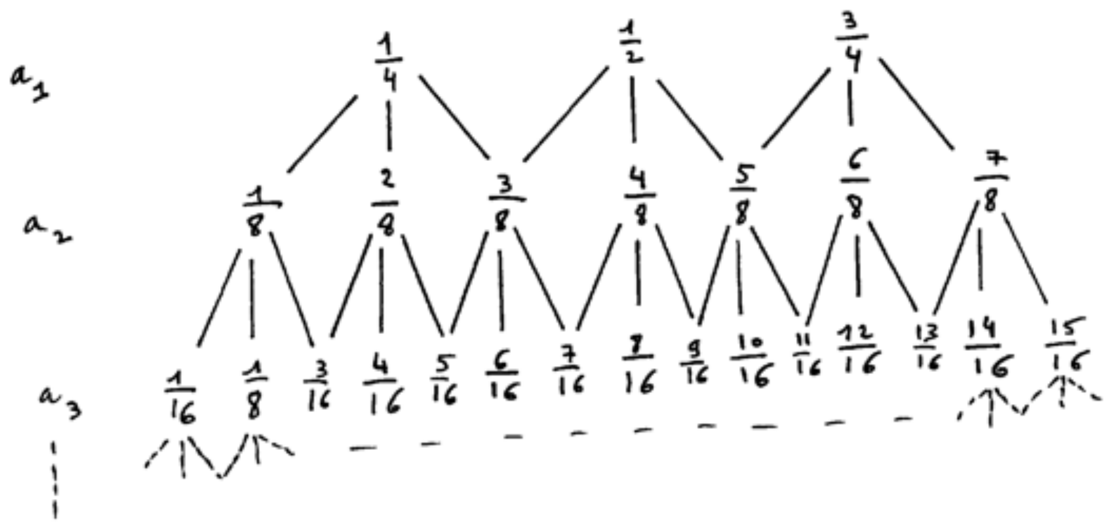
[9] Quoique Brouwer, avec son instinct dialectique, n'en reste pas à cette conception unilatérale :

> (Br 1912, p. 44) « l'intuitionnisme ne reconnaîtra que des ensembles dénombrables […] », et p. 48 « aleph 0 est la seule puissance infinie dont les intuitionnistes admettent l'existence. »
>
> (Br 1929, p. 260) « [L'abstraction mathématique] dépouille la dyade de son contenu concret pour ne la conserver que comme forme vide, substrat commun de toutes les dyades. Ce substrat commun à toutes les dyades forme l'intuition originaire de la mathématique, dont *l'autodéploiement* introduit notamment *l'infini à titre de réalité de pensée*, et livre (d'une façon qui ne sera pas analysée ici) d'abord *la totalité des nombres naturels*, *puis celle des nombres réels*, et enfin toute la mathématique pure. » (passages soulignés par moi)

La « totalité » (*Gesamtheit*) des réels n'évoque-t-elle pas un objet déterminé, et dans ce sens achevé, « fini », contrairement au présupposé intuitionniste ?

le déploiement revient à fabriquer des chemins infinis (r_i) de rationnels tels que $|r_{i+1} - r_i| < 2^{-i}$. Ce qui fait qu'une fois choisi r_i, il y a une infinité dénombrable de choix possibles pour r_{i+1} : que ce soit au démarrage où à chaque étape, nous avons donc affaire à une entité dénombrable, c'est-à-dire *en gestation*, qui ne peut donc servir elle-même, du point de vue constructif, à la génération d'une autre entité.

C'est pour obvier à cette situation que Brouwer va considérer des déploiements particuliers, dits « éventails », tels qu'à chaque étape il n'y ait qu'un nombre fini de choix. Par exemple (Br 1930, p. 276) l'intervalle [0, 1] peut être engendré par l'éventail suivant :



ce qui veut dire que [0, 1] est « l'espèce » des suites de rationnels dyadiques $(a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots)$ avec $|a_{n+1} - a_n| \leq 2^{-n-2}$, *chaque terme étant choisi librement parmi trois possibilités*, et chaque suite étant représentée par une branche infinie partant de l'un des sommets 1/4, 1/2 ou 3/4. Par exemple, en partant de 3/4 (resp de 1/4) et en allant tout le temps à droite (resp à gauche), on engendre 1 (resp 0) ; en partant de a_n et en allant toujours tout droit, on engendre le rationnel dyadique a_n ; en partant de 3/4 (resp de 1/2) et en allant toujours à gauche (resp à droite), on engendre 1/2 (resp 3/4). Un chemin quelconque est une suite de Cauchy de rationnels qui engendre un réel de [0, 1].

Inversement, soit x un élément quelconque de [0, 1], qui n'est pas une fraction dyadique, et qui, par conséquent, sera toujours situé « entre » les nombres qui figurent sur une ligne quelconque du déploiement ci-dessus.
On fabrique un générateur de x au moyen d'une suite d'intervalles emboîtés $[x_n, x_{n+1}]$ qui le contiennent :

> supposons par exemple que x soit compris entre 1/4 et 1/2 ; on peut choisir $x_1 = 2/2^2$, et on a $|x - x_1| < 1/2^2$.
> x sera compris par exemple entre 3/8 et 1/2 ; on peut choisir $x_2 = 3/2^3$, et on aura $|x - x_2| < 1/2^3$ et $|x_2 - x_1| < 1/2^3$,
> et ainsi de suite.

Donc quel que soit n il existe $x_n = p_n / 2^{n+1}$ tel que $|x - x_n| < 1/2^{n+1}$ et $|x_{n+1} - x_n| < 1/2^{n+2}$, où p_n est un entier compris entre 1 et $(2^{n+1} - 1)$.
Finalement, le réel x « coïncide » avec la suite de Cauchy de fractions dyadiques ($x_n = p_n / 2^{n+1}$).

La possibilité de ce x défini par une suite infinie de « entre » est une affaire de principe pour Brouwer. En effet, ce « entre » est selon lui un effet de l'intuition originaire de la dyade qui, « par la considération de la liaison comme nouvel élément », permet l'insertion entre deux éléments donnés. C'est ainsi que le continu comme « intuition pure dans le style de Kant et de Schopenhauer se confirme pour l'essentiel à la lumière de l'intuitionnisme » (Br 1930, p. 276-277).

Du point de vue de Brouwer, nous disposons donc avec ce déploiement d'un engendrement réel, « palpable » et total, du continu non dénombrable [0, 1] :

- palpable, parce que les possibilités de bifurcations de chaque chemin à chaque étape sont bien déterminées, et
- total, parce que *grâce à la liberté (relative) de choix* à chaque étape, nous avons — toujours selon Brouwer — avec ce mode de génération bien davantage que ce que proposait l'ancien intuitionnisme, à savoir, rappelons-le, un « continu réduit ». Le « entre deux éléments », qui provient de l'intuition originaire du continu, est *inachevable* point par point, ne peut être modélisé que par l'admission d'éléments *inachevés* (les suites de choix libres).

D'où l'importance exceptionnelle, dans la pensée de Brouwer, de cet objet bizarre nommé « suite de choix libres », puisqu'il est la clé du passage du « continu réduit » au continu véritable, « total ». Les suites de choix entièrement libres des termes de la suite (a_n) s'opposent aux suites contraintes, c'est-à-dire aux suites définies par une loi récursive $a_{n+1} = f(a_n)$: à un pôle, par conséquent, les *suites sans loi,* à l'autre pôle les suites contraintes par une loi, avec entre les deux toutes sortes d'intermédiaires, ainsi que nous le dit Brouwer dans le texte déjà cité :

> [le choix] peut être entièrement libre aussi longtemps que le sujet créateur le désire mais que cette liberté peut à une étape quelconque être complètement suspendue, que ce soit dès le début ou bien à partir d'un rang quelconque, par une loi qui fixe d'avance tous les autres termes.
> […]
> Enfin toutes ces interventions, conformément au second acte de l'intuitionnisme, peuvent être rendues dépendantes des possibles expériences mathématiques futures du sujet créateur (Br 1952, p. 453).

Voilà donc Brouwer, au bout du bout de sa *construction* du continu véritable, contraint d'introduire un objet *fondateur* de ce même continu et qui est *par définition non construit*. Va-t-il s'avouer vaincu et renoncer à son exploration du continu, en l'abandonnant aux brumes de l'intuition pure a priori ? Certainement pas : non seulement il ne lâche pas prise, mais il va même imposer une logique constructive à cet objet non construit : il le faut bien, car si l'on veut faire de ces « suites de choix plus ou moins libres » des entités mathématiques, il est nécessaire de leur attribuer des propriétés, lesquelles, suivant le principe constructif, doivent pouvoir être établies par des procédures finies. D'où le « principe de continuité », dont l'idée générale est la suivante :

> Soit une suite de choix (a_n) ; une propriété éventuelle P de cette suite doit pouvoir être décelée en un temps fini, c'est-à-dire qu'il doit exister un entier k tel que P soit connue (démontrée) dès que le segment initial (a_1, a_2, …, a_k) de la suite (a_n) est connu ; et deux suites ayant le même segment initial (les mêmes k premiers termes) jouissent de la propriété P.

Ce principe, rejeté semble-t-il par la plupart des successeurs de Brouwer qui ne retiennent que le côté purement constructif de sa démarche, continue malgré tout à susciter des tentatives de réhabilitation et de formalisation. Nous laisserons ces dernières de côté et nous contenterons de suivre Brouwer lui-même, *qui n'a posé le principe en question, je crois, que pour justifier contre vents et marées sa propre intuition fondamentale*, selon laquelle *le continu est « indissociable »*, dans un sens que nous allons préciser. Il y parvient grâce à son fameux théorème suivant lequel toute fonction définie sur un intervalle réel et à valeurs dans un intervalle réel est uniformément continue.

En voici la preuve, inspirée de celle de Heyting (*ouvrage cité*, chap. 3), qui a le grand avantage d'être lisible, contrairement à certains textes de Brouwer. On commence par poser une forme spécifique du principe de continuité :

> Soit S un déploiement « non habillé » (voir plus haut) et Φ une application de S dans l'ensemble des entiers naturels. Alors il existe un algorithme qui calcule $\Phi(a)$ pour tout élément a de S à partir d'un segment initial de a. De plus, le fait qu'un segment admissible donné $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ soit suffisant ou pas pour calculer $\Phi(a)$, pour tout a ayant ce segment initial-là, est décidable.

Ensuite, à l'aide d'un autre principe, dit « d'induction barrée », une sorte de récurrence pour les déploiements, on démontre le « théorème de l'éventail » :

> Soit Φ une fonction à valeurs dans l'ensemble des naturels définie sur un éventail[10] S ; alors on peut calculer un entier N tel que $\Phi(a)$ soit déterminé par les N premiers termes de a. Cela veut dire que si deux éléments a et b de S ont les mêmes N premiers termes $(a_1, a_2, \ldots, a_N)$, alors $\Phi(a) = \Phi(b)$.

Soit enfin l'intervalle [0, 1] engendré par le déploiement dyadique S ci-dessus, et f une fonction de [0, 1] vers [0, 1]. Pour $x \in [0, 1]$, qui coïncide donc avec un générateur $(x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$, son image $y = f(x)$ coïncide avec un générateur $(y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots)$, avec $y_n = p_n/2^{n+1}$, où p_n est un entier compris entre 1 et $2^{n+1} - 1$.
Soit n un entier fixé. On considère l'application Φ qui à chaque élément x de l'éventail S fait correspondre p_n, c'est-à-dire la $n^{\text{ième}}$ « composante » du générateur coïncidant avec $f(x)$.
Alors d'après le théorème de l'éventail, il existe un entier N (dépendant de n) tel que pour tout x appartenant à S, p_n est déterminé par les N premières composantes de x, c'est-à-dire par $(x_1, x_2, \ldots, x_N)$. Ce qui veut dire que si x et x' ont les mêmes N premières composantes, i.e. $|x - x'| < 1/2^{N+1}$, alors leurs images y et y' ont la même $n^{\text{ième}}$ composante $y_n = p_n/2^{n+1}$. Donc $|y - y_n| < 1/2^{n+1}$ et $|y' - y_n| < 1/2^{n+1}$, et par suite $|y - y'| < 1/2^n$.
On a donc démontré que quel que soit n, il existe N tel que $|x - x'| < 1/2^{N+1}$ entraîne $|f(x) - f(x')| < 1/2^n$. La fonction f est donc uniformément continue sur [0, 1]. La démonstration se généralise à une fonction sur intervalle I quelconque.

On en déduit que le continu est « indissociable » de la façon suivante :

[10] Rappelons qu'un éventail est un déploiement avec un nombre fini de choix à chaque étape.

> une sous-espèce A d'une espèce B est dite « détachable » si pour tout élément de B, on peut décider s'il appartient à A ou non. Soit J une partie détachable de l'intervalle I, et f la fonction caractéristique de J, i.e. $f(x) = 1$ pour $x \in$ J et $f(x) = 0$ pour $x \in$ I - J. Comme elle est continue, elle est constante. *Par conséquent, il n'existe pas d'autres sous-espèces détachables d'un intervalle de réels que cet intervalle lui-même ou l'intervalle Ø.*

Ainsi, le continu fabriqué par Brouwer, dont aucune partie ni aucun point ne peuvent être extraits (« détachés »), est-il à l'opposé du continu des mathématiques classiques, qui est une agglomération de points avec une structure topologique adéquate. Le nombre 1/2 ne peut être détaché du continu [0, 1], ni l'ensemble des rationnels de [0, 1]. Comme le dit Van Dalen (*article cité*, p. 143) :

> Thus Brouwer's continuum is extremely tight ; it is connected to a degree that greatly surpasses the topological connectedness.

Inversement, on ne peut pas recoller deux continus pour en faire un seul :

> La réunion des intervalles de 0 à 1 et de 1 à 2 ne forme pas un continu parce qu'elle contient des points dont on ne connaît pas la relation d'ordre par rapport au point 1. (Heyting, *Les fondements des mathématiques, Intuituionisme, Théorie de la démonstration,* Gauthier-Villars, 1955, p. 31)

Tel est le résultat du « second acte de l'intuitionnisme ». Son fondement, à savoir le « principe de continuité », *contredit* les mathématiques classiques, alors que le refus (partiel, comme nous le savons) du principe du tiers exclu et le constructivisme afférent ne font que les *cadrer*. C'est pourquoi ce « second acte » est sévèrement critiqué par nombre de successeurs de Brouwer, comme Errett Bishop dans *Constructive Mathematics* (1985) :

> It has been asserted by Brouwer that all functions [de R dans R] are continuous, but no acceptable proof of this assertion is known (p. 67).
> To accept Brouwer's arguments as a proof would destroy the character of mathematics (p. 76).

et il conjecture que le théorème en question est indécidable : it « will never be proved and never be counterexampled (*id.)* ».

On ne peut pas ne pas remarquer la faiblesse suivante dans le développement de Brouwer :

> - d'un côté on fabrique un déploiement comme une matrice du continu, puis on invoque un principe de continuité qui conduit à une connexité « extrême ». On aboutit donc à un résultat absolu, indépendant du temps, qui induit une supra-connectivité et donc une topologie nouvelle.
> - de l'autre, les seules images du phénomène fournies aussi bien par Brouwer que par ses successeurs résultent de nombres isolés, existant individuellement, donc détachables en principe, et s'ils ne sont pas détachables effectivement c'est seulement parce qu'on ne sait pas *encore* s'ils sont = 0 ou ≠ 0, rationnels ou irrationnels, < 1 ou > 1, etc.

D'un côté, donc, un résultat définitif qui promet un nouveau concept fonctionnel et topologique, et de l'autre, non pas de nouveaux objets mathématiques mais uniquement des objets classiques (*le* nombre tel que ou *le* point tel que) pensés isolément (*le*) à la façon classique et artificiellement « floutés » par une incertitude d'ordre temporel.

Il est cependant possible de récupérer rationnellement l'idée de Brouwer, tout d'abord en s'appuyant comme lui sur l'intuition du temps et sur une dynamique du continu, elle-même issue, toujours selon Brouwer, du passage d'une sensation à une autre. D'après la *représentation intuitive* du mouvement continu d'un point x allant de 0 à 1 sur la droite réelle, il est vrai qu'aucune partie de [0, 1] n'est « détachable », dans le sens où ce mouvement, justement parce qu'il est continu, ne se décompose pas en morceaux comme par exemple [0, 1/2] et [1/2, 1] ; et d'ailleurs, comme c'est bien connu, si cela était possible on pourrait répéter à volonté la décomposition {[0, 1/2], [1/2, 1/4], [1/4, 1/8], …} et l'opposer par conséquent à la possibilité même du mouvement de 0 à 1, et par suite à la possibilité de tout mouvement d'un point à un autre.
La solution dialectique est que le point x en mouvement n'*est à aucun moment* en un point donné du segment [0, 1], en 1/2 par exemple, mais qu'il y *passe*. On n'a pas l'inégalité $x < 1/2$ *seule*, sinon il ne passerait pas par 1/2, et pour la même raison on n'a ni l'égalité $x = 1/2$ seule, ni l'inégalité $x > 1/2$ seule. L'affirmation « ou bien $x < 1/2$, ou bien $x = 1/2$, ou bien $x > 1/2$ » est en effet fausse : « passer par 1/2 » implique d'avoir *à la fois* $x < 1/2$, $x = 1/2$ et $x > 1/2$.

Nous nous retrouvons donc dans une situation analogue à celle à laquelle nous avions abouti en étudiant le refus par Brouwer du principe du tiers exclu (§2). Nous y étions parvenus en examinant la dialectique de la proposition simple et fondamentale « x est un élément quelconque de l'ensemble E », qui exprime le rapport entre la « pluralité une » E et la « singularité plurielle » x. En reprenant cela en termes de continu :

> En concevant les objets discrets a, b, c, … comme un ensemble E, je crée du *un* en tant que multiplicité et diversité supprimées, donc de l'indissociable, du continu : première négation, passage du discret dans le continu. Cependant les objets disparus dans le *un* ne sont pas pour autant anéantis, ils sont en réalité *unifiés* grâce au concept contradictoire d'« élément quelconque » : deuxième négation, synthèse du discret (« élément ») et du continu (« quelconque »), synthèse qui est du même coup un retour dans un discret d'ordre supérieur, puisque le x opératoire, élément clé de l'analyse mathématique (soit x tel que …), est manipulé comme *un* objet.

On voit en fin de compte que ni la métaphore du mouvement[11], ni le continu mathématique classique au sens d'intervalle de nombres réels, ne sont nécessaires pour saisir le concept général de continu, qui opère aussi bien dans le simple E = {a, b, c}. On voit aussi que le continu intuitionniste pensé par Brouwer comme l'opposé radical du discret, dans le sens où ce continu contient par exemple des éléments (définis par les fameuses « propriétés évanouissantes ») ni égaux à 1/2 ni différents de 1/2 (Br 1930, p. 278), n'est, sous cet aspect-là, rien que de très banal, sinon souvent remarqué : si je prends en effet deux éléments quelconques x et y de E = {1, 2, 3}, et quelconques l'un par rapport à l'autre, je n'ai ni $x = y$ ni $x \neq y$.

« Rien que de très banal » : échec de Brouwer, donc. *Échec par rapport à sa promesse initiale de mettre en évidence l'unité du continu et du discret* : s'il est vrai que le déploiement dyadique de suites plus ou moins libres se présente bien comme un passage du discret dans le continu, il n'y a

[11] Bien que celle-ci soit omniprésente dans les textes mathématiques sous le vocable de « variable ».

dans le résultat, dans le continu construit par Brouwer, qu'un bloc dont absolument rien n'est « détachable », c'est-à-dire en fin de compte un « un » absolu qui, en tant que tel est certes un discret, mais un discret mort. Les déploiements et suites de choix libres, comme la critique du principe du tiers exclu, ne vont pas au delà d'une *intuition* de la dialectique interne de la mathématique, et demeurent par conséquent stériles.

Si tous les successeurs de Brouwer se revendiquent du « premier acte » de l'intuitionnisme, en tant que socle des mathématiques constructives, la plupart d'entre eux rejettent le « second acte » fondé sur les suites de choix libres. Errett Bishop, éminent constructiviste, critique sévèrement la démarche de Brouwer, la qualifiant d'idéalisme, de spéculation métaphysique, compulsive, aboutissant à une théorie semi-mystique du continu[12] : critique nulle et non avenue dans la mesure où elle ignore l'intuition dialectique sous-jacente.
On peut faire mieux. Brouwer a droit à une critique pleine de respect pour sa tentative « révolutionnaire », « héroïque » selon les termes mêmes de Bishop.

4- Le « sujet créateur » véritable

L'idée de faire intervenir le *sujet* directement *dans* la théorie mathématique — et pas seulement en surplomb, d'un point de vue historique ou philosophique — est certainement remarquable ; mais il faut reconnaître, tout aussi certainement, que sa formulation par Brouwer est particulièrement étriquée.

Tout d'abord l'intuition principielle du « sujet » mathématicien, maintes fois invoquée par Brouwer et que nous rappelons ci-dessous, n'est en réalité rien de plus que le *décalque formel d'une suite de perceptions* :

> […] la mathématique intuitionniste est une activité de l'esprit essentiellement sans langage, qui prend son origine dans la perception d'un coup de temps, i.e. la division d'un instant de vie en deux objets distincts, dont l'un donne naissance à l'autre tout en étant conservé par le souvenir. Si l'on dépouille de toute qualité la bi-unité ainsi engendrée, reste la forme vide du substrat commun à toutes les bi-unités. Ce substrat commun, cette forme vide, est l'intuition fondamentale des mathématiques (Br 1952, p. 449).

Ensuite, le recours à des soi-disant intuitions fondamentales, qui prétendent être à l'épistémologie des mathématiques ce que les axiomes et postulats sont à la mathématique elle-même, ne serait au mieux en général qu'un pis-aller, en attendant de nouvelles découvertes : découvertes mathématiques, par exemple celle des géométries non-euclidiennes qui ont tordu le coup à la thèse de l'intuition inamovible de l'espace, mais aussi découvertes issues de l'investigation historique de la pratique humaine de transformation du monde, qui peuvent dévoiler des racines encore plus originelles que les prétendues intuitions originelles.

Et enfin, pour revenir au scénario de Brouwer, une fois reçue l'impulsion initiale, la seule façon pour le sujet d'opérer une création est de choisir « librement », en réalité *aléatoirement*, des suites de termes : est-il alors davantage qu'un générateur de termes aléatoires ? Belle « création » en vérité !

En réalité, le sujet créateur véritable est bien autre chose que ce personnage bizarre qui, à l'origine,

[12] Errett Bishop, Douglas Bridges, *Constructive Analysis*, 1985, Springer, pp. 8, 9, 12.

décalque une perception, en déduit la répétition abstraite indéfinie et passe ensuite son temps à faire des tirages aléatoires. Ce personnage n'est qu'une invention *ad hoc*, bien pauvre, pour donner un fondement épistémologique à l'activité mathématique ; il est aux mathématiques ce que sont à l'économie politique les « robinsonnades » brocardées par Marx.

On peut toutefois créditer l'idée de départ de Brouwer d'une belle profondeur historique. Il se trouve en effet que l'idée d'une suite indéfiniment déployable d'« unités » est bel et bien, sinon une intuition, du moins un caractère fondamental de la pensée humaine dès ses débuts accessibles. C'est elle en effet qui constitue l'ossature logique, le modèle universel des mythes de Genèse aussi bien chez les peuples traditionnels que dans les religions de l'Orient ancien[13]. Cette idée du déploiement indéfini de l'Un comme « logique » de la génération est la manifestation la plus abstraite de la dialectique spontanée caractéristique de la pensée primitive[14] : dans ce sens, la *Ur-Intuition* de Brouwer est une réalité historique. Elle n'est cependant pas nécessairement liée à la perception du temps et surtout, elle ne donne pas spontanément naissance à la suite *numérique*.

Par ailleurs le péché d'omniscience, que Brouwer impute à une croyance absolue au principe du tiers exclu, est un péché originel de la pensée humaine depuis ses débuts accessibles. « Je sais », proclame la pensée primitive dans toute l'ardeur et la naïveté de sa jeunesse ; « pour cet orgueil, tu sera puni de mort », dit la religion dans son moment négatif ; « pour cet orgueil, tu sera puni de contradictions et de casse-tête vides de sens », tonne l'intuitionniste. Mais c'est le propre de l'humain que de prétendre à la connaissance, et de poser pour cela a priori des cadres que l'on remplit par la suite (synthèse a priori dans les grandes classifications primitives, elles-mêmes sources de déduction rituelle), et inversement de construire des cadres inductivement. Et l'apparition de contradictions ne risque pas d'inquiéter la pensée primitive, elle qui est de part en part spontanément dialectique ; ce n'est une catastrophe que pour la mathématique contemporaine.

Dans le sillage de sa conception bien pauvre du sujet créateur, l'idée que se fait Brouwer de la nature de l'activité mathématique est bien peu intéressante. Elle ne se distingue pas du prêt-à-penser ordinaire des mathématiciens :

> C'est à partir de cette intuition du temps, *indépendante de l'expérience*, que *tous* les systèmes mathématiques ont été construits. (Br 1909, p.32, souligné par moi)
> [Formalisme et intuitionnisme] sont devenus de plus en plus nettement antithétiques ; cependant au cours des récentes décennies elles ont convergé pour écarter ensemble l'idée que le caractère exact de la validité des lois mathématiques serait celui des lois de la nature. (Br 1912, p. 41)

Sur ce dernier point, Heyting est encore plus radical :

> Sur un point elles [les différentes écoles] s'accordent de telle sorte qu'on peut aujourd'hui presque considérer comme une opinion commune des mathématiciens l'idée que *les énoncés de la mathématique pure n'expriment rien sur la réalité.* (*Les fondements des mathématiques* …, p. 71, souligné par moi)

Cette « opinion commune » est bien connue ; ce n'est qu'une opinion, justement, et pas une pensée. Peut-être n'est-elle au fond qu'une façon de mettre sous le tapis le problème agaçant de la « déraisonnable efficacité » des mathématiques.

---

[13] O. Keller, *L'invention du nombre. Des mythes de création aux Éléments d'Euclide*, Classiques Garnier, 2016.
[14] Ou « première », ou « traditionnelle », comme on voudra.

Il est certain que l'activité mathématique *s'oppose* aux données immédiates de l'expérience et de façon générale à la « nature ». C'est même une banalité, parce que c'est le propre de toute activité qui, en *saisissant* la nature dans le procès de production et de transformation, par là s'oppose en effet à elle, mais en la *pénétrant* intimement. Là est le creuset du procès de connaissance. Mais il y a beaucoup plus, puisque la spécificité de la pensée humaine est la capacité à se prendre elle-même pour objet — donc à s'opposer à elle-même —, et par conséquent à être son propre procès de production et de transformation.
C'est au cours de ces *travaux* — et par conséquent de façon indissociable de l'expérience au sens large — que s'inventent et se fabriquent des outils généraux de saisie, les concepts, et en particulier les concepts logico-mathématiques.

Les concepts logico-mathématiques sont *simplement outils, d'abord*, au même titre que les outils matériels. Comme tels, ils sont des intermédiaires de travail (préhension et transformation) *efficaces* ; efficaces justement parce qu'ils ne sont pas des simples « reflets » de l'objet travaillé — un reflet est passif, il ne transforme pas —. Et en tant qu'intermédiaires de travail, leurs « lois » (leur constitution interne) *ne sont pas* les lois de l'objet travaillé. Le biface préhistorique qui sert à décharner, décortiquer, trancher, est l'un des premiers outils inventés. Il serait évidemment absurde d'affirmer que la construction du biface est indépendante de l'expérience ; oiseux de se demander si les lois du biface[15] sont des lois de la nature ; franchement ridicule de s'émerveiller de la « déraisonnable efficacité » du biface. Le nombre entier naturel est sans doute l'un des premiers outils conceptuels de nature mathématique inventés. On peut adapter à son sujet ce qui vient d'être dit du biface.

Outils sans existence matérielle, mais « objets » tout de même, ensuite. On ne trouvera l'objet « nombre », par exemple, ni dans la nature, ni dans les pointillés des grottes ornées préhistoriques, ni dans telle ou telle aire du cortex cérébral[16]. Cependant, la pensée humaine étant capable de se prendre elle-même comme objet, on peut qualifier à bon droit d'« objets » les concepts que la pensée saisit à leur tour, tout en faisant par commodité comme si ces objets jouissaient d'une existence idéale a priori. Le nombre entier naturel est sans doute le porteur le plus puissant de cette illusion d'existence idéale a priori depuis deux millénaires et demi au moins partout dans le monde, de Pythagore à Kronecker en Occident.

Enfin et surtout, outils doués de vitalité. Les outils logico-mathématiques en effet se saisissent d'eux-mêmes. C'est donc qu'ils se dédoublent, et par là s'opposent à eux-mêmes. L'histoire des mathématiques est une longue histoire de négations, éventuellement influencées par des expériences externes, mais dont la fécondité mathématique ne peut résulter que d'un procès interne. Les nombres non-naturels, non-rationnels, non-réels, les géométries non-ceci ou non-cela, tout cela est bien connu. Ce sont des exemples de la démarche mathématicienne fondamentale de négations-*extensions* de concepts, de prime abord « abstraites », encore plus éloignées du réel que les concepts de départ, mais qui finissent par se révéler, parfois plusieurs siècles après, capable d'une saisie *encore plus concrète* — plus *efficace* — plus profonde et plus large du réel : dire, comme Heyting, que les énoncés de la mathématique pure n'expriment rien sur la réalité est soit faux — si l'on entend par là l'absence de rapport avec la réalité —, soit un truisme — si l'on entend

[15] Le biface réussi est un objet taillé dans la pierre, avec deux plans de symétrie perpendiculaires et un pourtour plan. On en retrouve dans toutes les régions du monde. Il a été fabriqué en masse pendant des centaines de milliers d'années, à partir de -1,6 millions d'années en Afrique.
[16] O. Keller, *ouvrage cité*, annexe 1 : « Existe-t-il un sens du nombre ? ».

par là que les énoncés mathématiques ne sont pas des copies de la réalité —. Plus généralement l'axiomatique, la logique mathématique avec ses problèmes d'indépendance, de complétude et de consistance sont un même et unique *auto-examen* de la mathématique : par là, celle-ci est *devenue indissociablement « métamathématique »*. La pratique la plus courante elle-même n'échappe pas au dédoublement contradictoire *constitutif* ; par exemple « l'élément quelconque » dont nous avons parlé, ou encore « dans un ensemble, une propriété, même contradictoire, définit un ensemble », ou « deux ensembles ayant les mêmes éléments sont égaux, même s'ils n'ont pas d'éléments », mais aussi « *a* égale *a* », « *p* implique *p* » etc. Ce serait un contre-sens de qualifier ces contradictions fécondes de simples commodités conventionnelles.

La rationalité dialectique des mathématiques *telles qu'elles sont* reste à mettre en évidence. Tel est le programme ; il est vaste. C'est le seul moyen de donner de l'air et de la lumière à l'atroce scolastique logique et ensembliste actuelle[17] et d'en finir avec la crise des fondements. Je vois un indice de possibilité dans ceci : la « catastrophe » dans les fondements provient de la résurgence du bon vieux paradoxe du menteur ; et une première élucidation mathématique par Gödel de la complétude et de la consistance est fondée sur une exploitation du même paradoxe. Or ce paradoxe, loin d'exposer la bête contradiction « A *à côté de* non-A », expose au contraire de la façon la plus abstraite le *mouvement* propre au jugement hypothétique : « *si* A *alors* non-A », « *si* non-A, *alors* A ». Autrement dit, il exprime formellement le *passage* dans le contraire, qui est l'essence de la dialectique. Vue de cette manière, la « catastrophe » pourrait être en réalité une « révélation ».

> Pourquoi ne concevrait-on pas la contradiction russellienne comme quelque chose de sur-propositionnel, quelque chose qui trône au dessus des propositions et regarde des deux côtés comme une tête de Janus ?
> […]
> Oui, ne pourrait-on commencer la logique sur cette contradiction ? et à partir d'elle en quelque sorte descendre vers les propositions ? La proposition qui se contredit elle-même existerait comme un monument (à tête de Janus) consacré aux propositions logiques. (Wittgenstein, *Remarques sur les fondements des mathématiques*, 4e partie 1942-1944, 59, Gallimard 1983, p. 219)

Voilà qui est intéressant, mais il ne faudra pas se contenter d'énoncer quelques aphorismes.

oOo

[17] Le « paradis que Cantor a créé pour nous » s'est changé en enfer.