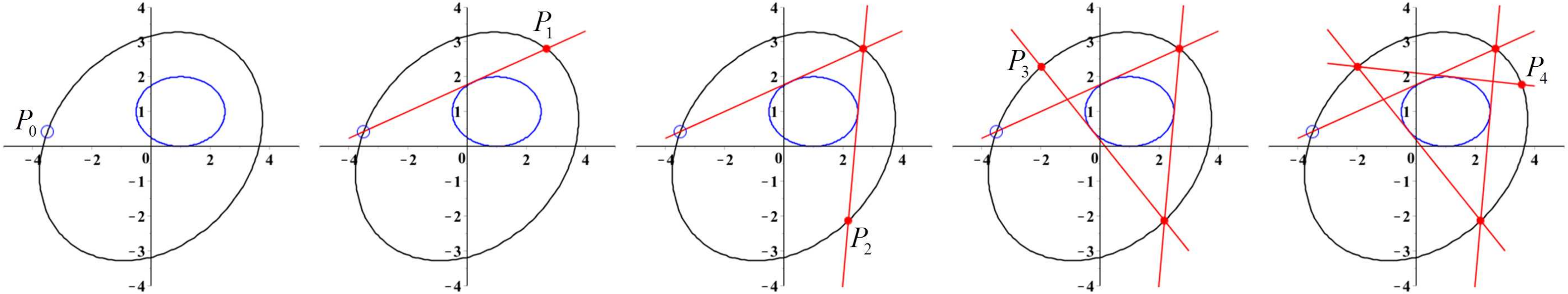
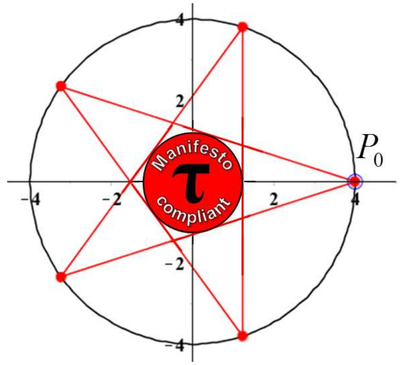
THEOREM OF THE DAY

Le Porisme de Poncelet *Considérons deux ellipses dans le plan euclidien, l'une d'elles complètement entourée par l'autre. Si une ligne polygonale fermée à n côtés peut être inscrite dans l'ellipse extérieure et circonscrite (c'est-à-dire chaque côté tangent) à l'ellipse intérieure, alors tout point de l'ellipse exterieure se trouve sur une telle ligne polygonale fermée à n côtés.*

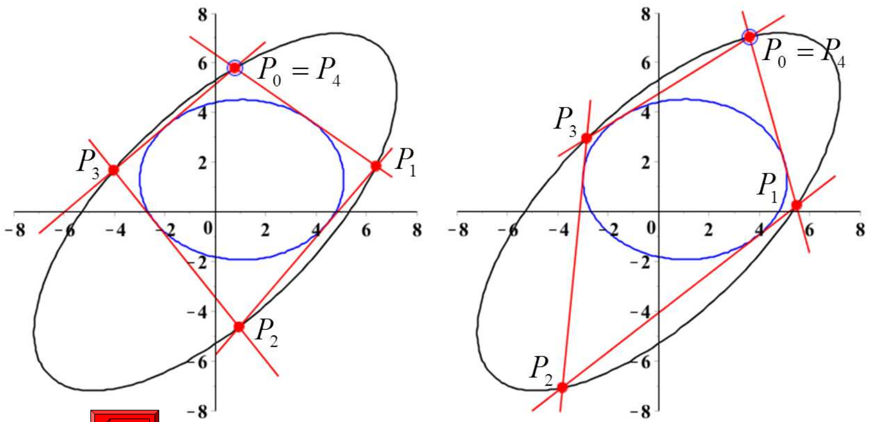


Autrement dit, supposons une séquence de points $P_0, P_1, \ldots$ de l'ellipse extérieure telle que la séquence $C_0 = P_0P_1, C_1 = P_1P_2, C_2 = P_2P_3, \ldots$ de cordes distinctes de l'ellipse extérieur soient toutes tangentes à l'ellipse intérieure. Alors, indépendamment du choix de P_0, soit

1. la séquence des P_i est infini; soit
2. la séquence des P_i se termine avec $P_n = P_0$, où le valeur de n dépend les ellipses mais ne dépend pas de P_0.



Dans le case où les ellipses sont des cercles concentriques cela est évident puisqu'une rotation d'une ligne polygonale fermée peut toucher n'importe quel point du cercle extérieur; un exemple est donné à droite: l'étoile à cinq points est une ligne polygonale fermée inscrit dans un cercle extérieur de rayon $r = 4$ et circonscrit à un cercle intérieur de rayon $r\cos(\tau/5)$. Le point encerclé sur l'axe des x peut être pris comme point de départ P_0 pour la séquence des cordes décrit au dessus, mais n'importe quel point du cercle extérieur aurait donné une séquence fermée isométrique. Le resultat rémarquable de Poncelet dit que, pour des ellipses arbitraires, l'isométrie peut être sacrifié sans perte d'invariance du cardinal de la séquence. Un example est donné ci-dessous.



Jean-Victor Poncelet était prisonnier de guerre lors de la campagne de Russie de Napoléon lorsqu'il démontra (en 1813) ce théorème ('porisme' ayant plus ou moins le sens de "si c'est vrai dans un cas alors c'est vrai dans un grand nombre, voire une infinité, de cas"). Pour Poncelet c'etait une application de la géométrie projective; d'une perspective moderne c'est un résultat profond de géométrie algébrique, essentiellement équivalent au fait qu'une structure de groupe peut être placée sur l'ensemble des points d'une courbe elliptique.

merci à E.A.

Lien externe: images.math.cnrs.fr/Quand-les-matheux-jouent-au.html.
À lire: *Géométrie vivante : ou l'échelle de Jacob* par Marcel Berger, Cassini, 2009.