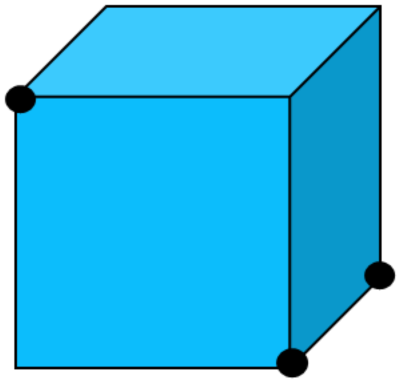
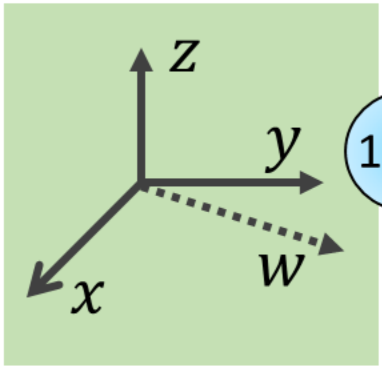
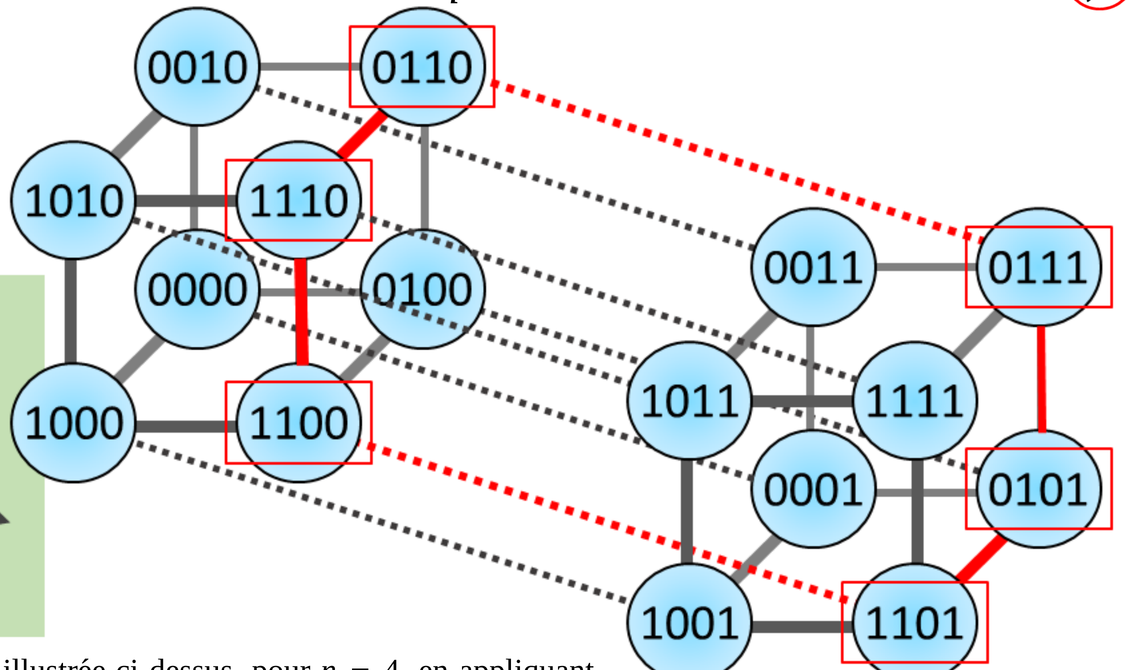
THEOREM OF THE DAY

Le Théorème de Bondy sur les sous-ensembles *Soit S un ensemble de n éléments et choisissons n sous-ensembles distincts. Alors il y a une restriction de S à $n-1$ éléments telle que ces sous-ensembles restent distincts.*

Pour $n = 3$ nous pouvons énoncer le théorème comme suit : *si trois sommets distincts du cube sont choisis alors une certaine projection sur une de ses faces retiendra trois sommets distincts.* Dans l'exemple ci-dessous la projection sur la face frontale rèduira à deux le nombre des sommets ; mais la projection sur la face en haut en retiendra trois.







Cette version géométrique du théorème de Bondy reste valide en général et est illustrée ci-dessus, pour $n = 4$, en appliquant sa procédure élégante de démonstration à un ensemble de sommets du 4-cube. En effet, nous l'essayerons avec $n+2 = 6$ sommets, indiqués avec des carrés rouges. Considérons toutes les arêtes du 4-cube qui joignent ces sommets : chaque telle arête consiste en un déplacement sur un des quatres axes x, y, z et w. Faites une liste des axes ainsi suivis. En partant en bas à droite dans le sens des aiguilles d'une montre nous avons : $w\,z\,x\,w\,z\,x$. Puisqu'il s'agit d'un cycle, chaque axe doit figurer un nombre pair de fois afin de retourner à notre point de départ. Alors nous avons utilisé $6/2 < 4$ axes. Mais cela dit que nous pouvons projeter sur l'axe manquant, parce que deux sommets quelconques étant identifiés par une telle projection doivent être joints par une arête du 4-cube. Et en effet en 'réduisant' toutes les arêtes de l'axe de y dans la graphique ci-dessus six sommets distincts en sont retenus. Cependent, cette approche est garantie seulement jusqu'à n sommets : dans ce cas, soit il y a un cycle, soit les arêts forment une forêt. Or sur n sommets, une fôret posséderait au maximum $n-1$ arêts, ce qui nous assure un axe de plus pour notre projection. C'est facile, d'ailleurs, dans notre graphique, de trouver un chemin sur cinq sommets, avec quatre arêts chaqune prenant un axe différent tel que toute projection doive identifier duex sommets.

Le théorème de 1972 de Bondy répond à une question de András Hajnal qui fait partie d'une recherche plus large sur les propriétés extrémales des restrictions d'ensembles. Un autre exemple est le suivant : étant donné une collection F de sommets distincts du n-cube, quelle est la valeur maximum d telle qu'une certaine projection sur $n-d$ dimensions aboutit à un d-cube. La réponse, que nous notons $d(F)$, est une mesure de la 'densité' de F, appelée la dimension de Vapnik–Chervonenkis, une notion importante dans la thórie de l'apprentissage automatique. Par exemple, si F est le 6-cycle indiqué ci-dessus alors $d(F) = 2$: en projetant sur les axes de y et de w le résultat est un 2-cube (un carré). Une borne célèbre est founi par **le lemme de Sauer :** $|F| \le \sum_{i=0}^{d(F)} \binom{n}{i}$. Pour notre collection F le lemme de Sauer nous dit que $|F| \le 1+4+6 = 11$, et ici on peut, en effet, ajouter à F cinq sommets de plus du 4-cube avant d'avoir nécessairement une projection sur un 3-cube.

merci à F.F.

Lien externe : perso.liris.cnrs.fr/aline.parreau/ (le manuscript de sa thèse)

À lire : *Machine Learning* par Massih-Reza Amini, 2e edition, Eyrolles, 2020.