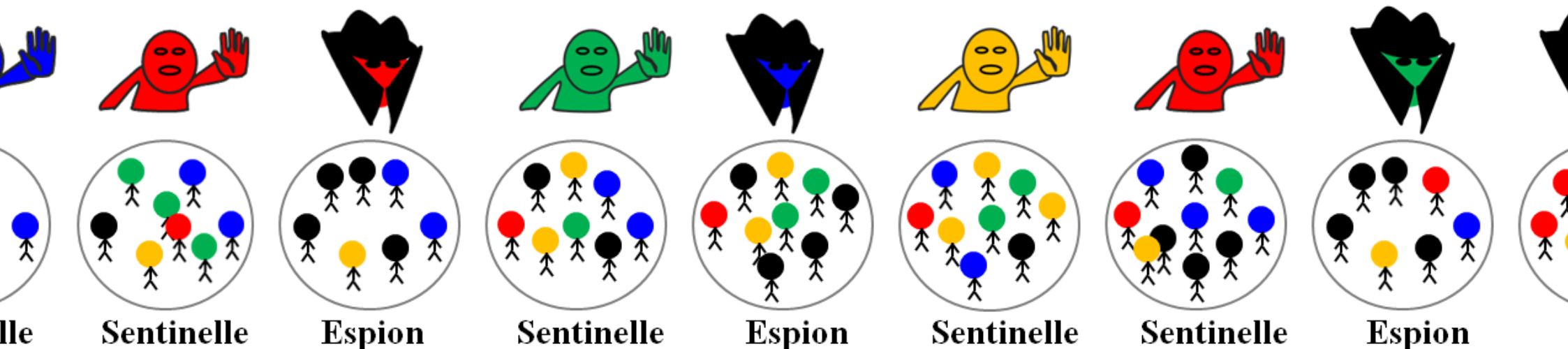




THEOREM OF THE DAY

Le Théorème de Cantor *L'ensemble puissance 2^X d'un ensemble X ne peut pas être mis en correspondance biunivoque avec X . La cardinalité de 2^X est donc strictement supérieure à celle de X .*



Démonstration: Imaginons que les membres de l'ensemble X constituent la population, possiblement infinie, d'un pays. L'ensemble puissance, 2^X , est l'ensemble de tous les sous-ensembles de X . Nous pouvons les imaginer comme étant toutes les communautés ou tous les sous-groupes constitués à partir de cette population. Supposons que nous pouvons mettre les individus de la population X en correspondance biunivoque avec ses communautés, c'est-à-dire, qu'à chaque personne est associé une communauté différente et inversement. Si une personne est associée à une communauté à laquelle elle appartient on appelle cette personne "Sentinelle", sinon on l'appelle "Espion". La communauté constituée de tous les espions est elle-même une communauté (possiblement infinie) de la population X . Est elle associée à une sentinelle ou un espion ? Aucun des deux ! En effet, un espion appartiendrait à cette communauté, ce qui ferait de lui une sentinelle ; inversement, une sentinelle n'y appartiendrait pas, ce qui en ferait un espion. Nous aboutissons à une contradiction : notre correspondance biunivoque n'existe donc pas. CQFD.

Ce théorème qui traite des différentes "tailles" de l'infini étend la démonstration de Cantor sur l'indénombrabilité de l'ensemble des nombres réels. L'argument utilisé ci-dessus revient essentiellement à celui de la diagonale de Cantor : on suppose qu'une liste des objets existe ; on spécifie un objet particulier dans la liste ; on démontre que cet objet invalide la liste. Le résultat est donc un phénomène assez rare en mathématiques : une démonstration facile d'un théorème profond et conceptuellement difficile.

La notation $\mathcal{P}(X)$ est souvent utilisée pour l'ensemble puissance; la notation 2^X provient du fait que, pour un ensemble fini de cardinal n , l'ensemble de tous les sous-ensembles a pour cardinal 2^n . Ce qui suit d'un argument de type 'inclu/exclu' comme on voit transféré au cas infini pour démontrer que l'ensemble des nombres réels est non-dénombrables.

Lien externe: accromath.uqam.ca/2007/02/linfini-cest-gros-comment/

A lire: *Desir D'infini: Des Chiffres, Des Univers Et Des Hommes* by Thuan Trinh Xuan, Gallimard, 2014.



merci à N.P., @paljasn

Created by Robin Whitty for www.theoremoftheday.org