THEOREM OF THE DAY

Le Théorème de Cantor de Non-dénombrabilité *L'ensemble des suites infinies de 0 et de 1 est non-dénombrable.*

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20 ·····
S_1	0	1	0	0	1	1	0	0	1	0	1	1	0	0	1	0	1	0	0	1
S_2	0	0	1	1	1	0	0	1	1	0	0	1	0	1	0	1	0	0	1	0
S_3	1	0	1	1	0	0	0	0	1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	1	0
S_4	1	0	0	1	1	0	1	0	1	1	0	0	1	0	0	1	1	1	1	0
S_5	1	0	1	0	0	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	1	0
S_6	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	1	0	0	1	0	0	1	0	1
S_7	1	1	0	0	1	1	0	0	1	0	0	0	1	1	1	1	0	1	1	0
S_8	1	0	0	1	0	1	1	0	0	1	1	0	0	0	0	0	1	1	1	0
S_9	1	0	0	1	0	0	1	1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0
S_{10}										1										
S_{11}											0									

S	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20 ·····
	1	1	0	0	1	1	0	0	1	0	1	1	0	0	1	0	1	0	0	1
	0	1	1	1	1	0	0	1	1	0	0	1	0	1	0	1	0	0	1	0
	1	0	0	1	0	0	0	0	1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	1	0
	1	0	0	0	1	0	1	0	1	1	0	0	1	0	0	1	1	1	1	0
	1	0	1	0	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	1	0
	1	0	1	0	1	1	1	0	1	0	1	1	0	0	1	0	0	1	0	1
	1	1	0	0	1	1	1	0	1	0	0	0	1	1	1	1	0	1	1	0
	1	0	0	1	0	1	1	1	0	1	1	0	0	0	0	0	1	1	1	0
	1	0	0	1	0	0	1	1	0	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0
										0										
											1									

Démonstration: Supposons (pour une contradiction) que l'ensemble des suites infinies de 0 et de 1 soit dénombrable. Ca veut dire qu'on peut faire une liste éxhaustive des suites: $S_1, S_2, S_3, \ldots$,. Notons $S_i(j)$ l'élément j de la suite S_i. Alors défінons une nouvelle suite, S, dont l'élément i est égale à 1, si $S_i(i) = 0$, et égale à 0, si $S_i(i) = 1$. Sous forme d'un raccourci mathématique on ecrit, pour $i = 1, 2, 3, \ldots, S_i = 1 - S_i(i)$. Or, S est certainement une suite infinie de 0 et de 1, alors elle doit être membre de notre liste: elle est, disons, S_k, qui veut dire que son élément k soit $S_k(k)$. Mais celle-ci est, par définition, $1 - S_k(k) \neq S_k(k)$. Nous avons donc contredit la possibilité de construiser notre liste des suites. CQFD

On voit en action ici le fameux *argument de la diagonale* de Cantor, illustré ci-dessus. La suite S géneré sur la diagonale à droite se ressemble au début la suite S_7 à gauche: "110011 . . .". Mais la comparison échoue au 7ème élément, ce qui est inévitable par définition de S.

Le théorème établit que l'ensemble des nombres réels est *non-dénombrable*, c'est a dire, ses éléments ne peuvent être enumerés sans omission ni répétition dans une liste indexée par les entiers naturels $(1,\ 2,\ 3, \ldots)$. Pour le vérifier informellement, considérons les suites infinies de 0 et de 1 comme les développements binaires des fractions (par exemple, $0.010011\ldots = 0/2 + 1/4 + 0/8 + 0/16 + 1/32 + 1/64 + \ldots$). Plus généralement, on conclut que l'ensemble des sous-ensembles d'une ensemble dénombrablement infini est non-dénombrable: considérons chaque suite infinie de 0 et de 1 comme les instructions pour construire un sous-ensemble: l'élément i de la suite indique si, oui oú non, on veut inclure (1) l'élément i ou de l'éxclure (0).

1973 a été témoin à la découverte historique de Cantor qu'il éxiste les différents «tailles» de l'infini: l'ensemble non-dénombrable des nombres réels en contraste avec celles des nombres rationnelles et des nombres algébriques, qu'il a démontré sont tous les deux dénombrables.

Lien externe: dehornoy.users.lmno.cnrs.fr/Talks/DycShort.pdf (1.1MO).

A lire: Aventures Mathématiques par Miguel de Guzmán, PPUR presses polytechniques, 1990.