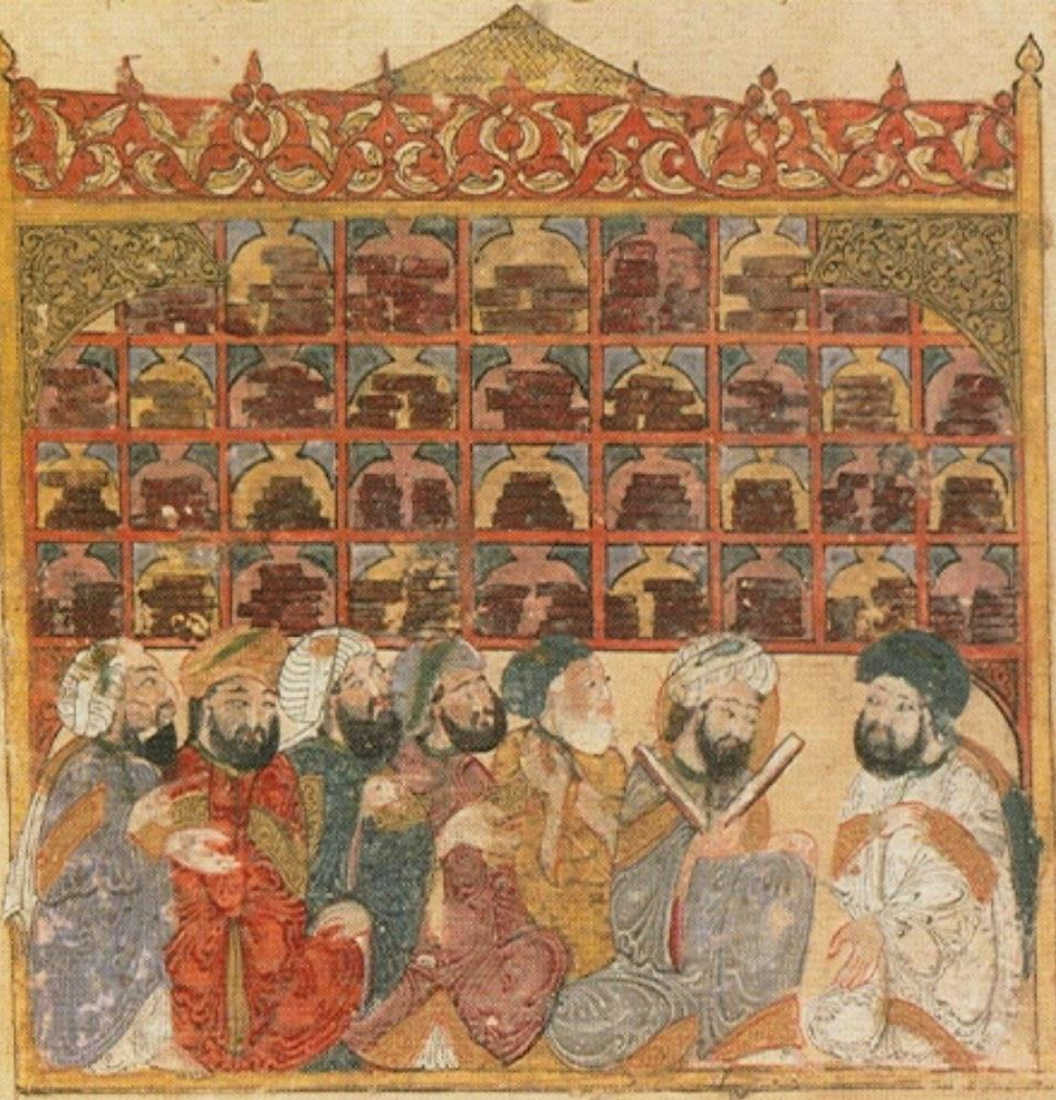


Café scientifique

Exposé sur un thème choisi, suivi d'un échange

Le plus ancien problème mathématique non résolu

Robin Whitty

Mercredi 14 septembre 2022



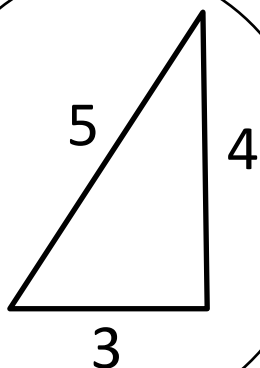
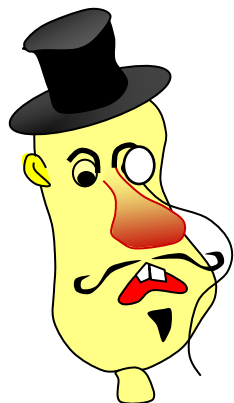
C'est quoi votre problème ?

Vous me donnez un nombre entier



6

A moi de trouvez un triangle rectangle aux cotés rationnels dont l'aire est cet nombre entier



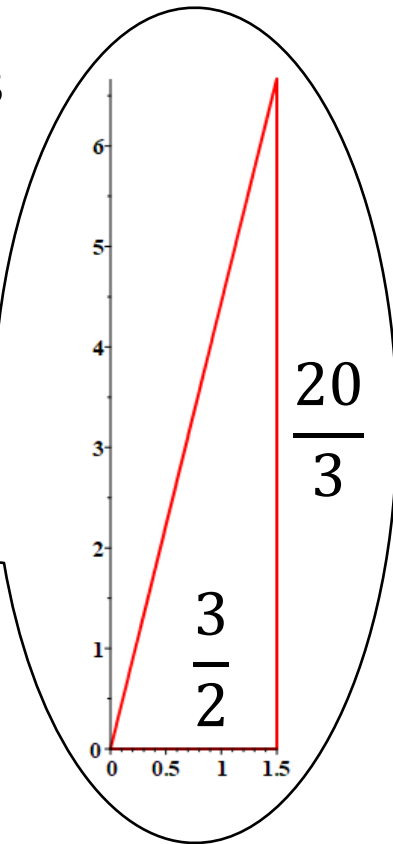
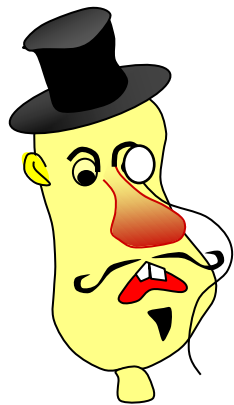
$$\frac{1}{2} \times L \times H =$$
$$\frac{1}{2} \times 3 \times 4 = 6$$

C'est bon !

C'est quoi encore 'rationnel' ?

Un *nombre rationnel* est un nombre qui peut être écrit en une fraction de deux nombres entiers

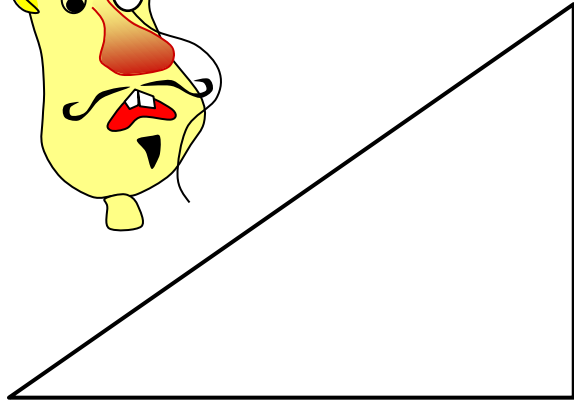
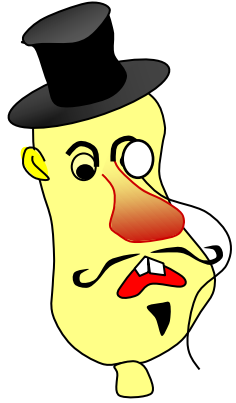
Cherchez: un triangle rectangle dont les cotés sont rationnels et dont l'aire est égale à 5



$$\frac{1}{2} \times L \times H =$$
$$\frac{1}{2} \times \frac{3}{2} \times \frac{20}{3} = 5$$

C'est bon !

Alors, ça peut se révéler un peu compliqué ...



$$\frac{6803298487826435051217540}{411340519227716149383203}$$

$$\approx 16.534$$

$$\frac{411340519227716149383203}{21666555693714761309610}$$

$$\approx 18.985$$

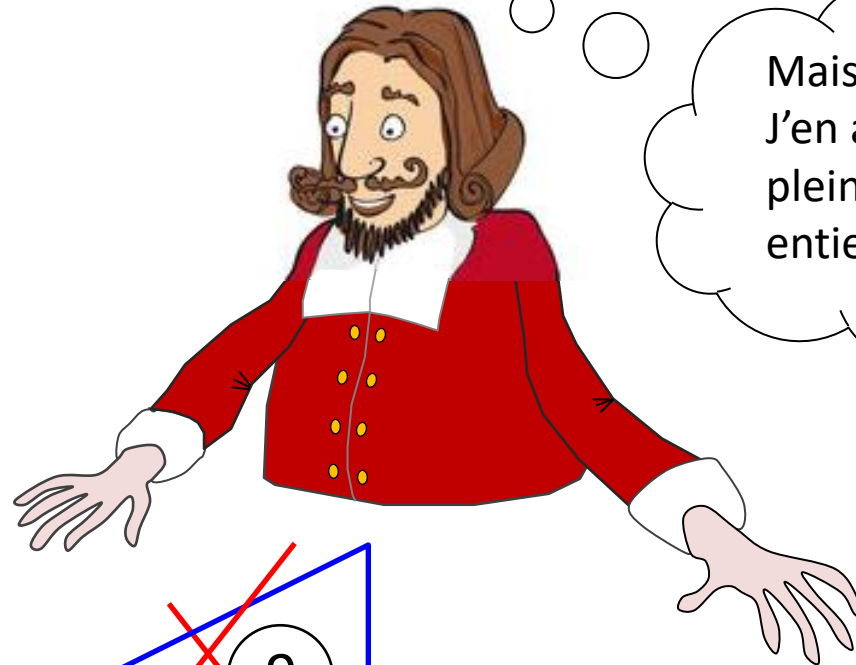
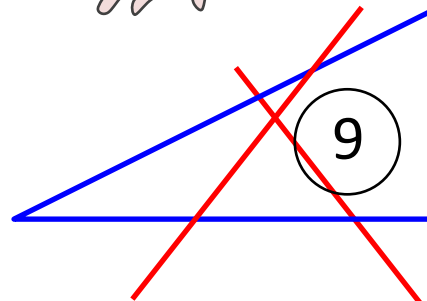
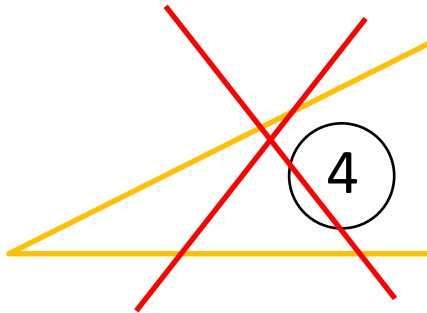
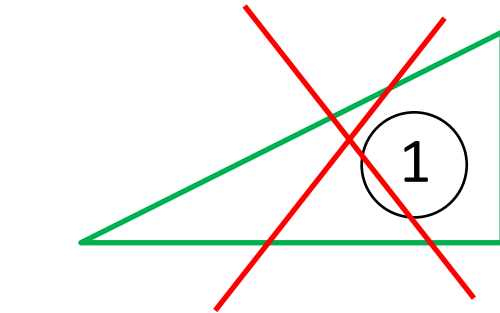
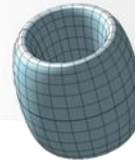


157



$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \times L \times H &\approx \\ \frac{1}{2} \times 18,985 \times \\ 16,539 &= \\ 156,99 \\ \text{C'est bon !} \end{aligned}$$

Complicqué ... par fois impossible !

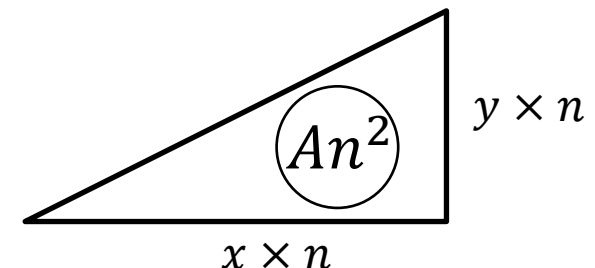
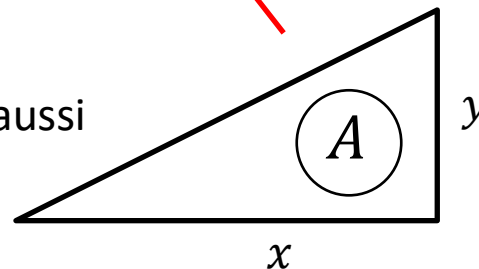


Mais dit donc !
J'en ai éliminé
plein nombres
entiers

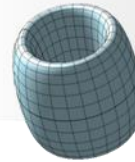
Pierre de Fermat

Image par Benoît Leturcq merci à
fermat-science.com

En effet, si A soit l'aire d'un triangle rectangle, alors $A \times n^2$ doit en être aussi



Donc on a : le « problème des nombres congruents »



Un nombre entier positif est un nombre congruent si et seulement si il est l'aire d'un quelconque triangle rectangle rationnel.

Le problème est de déterminer quels nombres entiers sont congruents

???

0 1 3 6 2 7
: OE 13
: IS 20
23 12
10 22 11 21

THE ON-LINE ENCYCLOPEDIA
OF INTEGER SEQUENCES[®]

founded in 1964 by N. J. A. Sloane

oeis.org

Search

[Hints](#)

(Greetings from [The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences!](#))

A003273

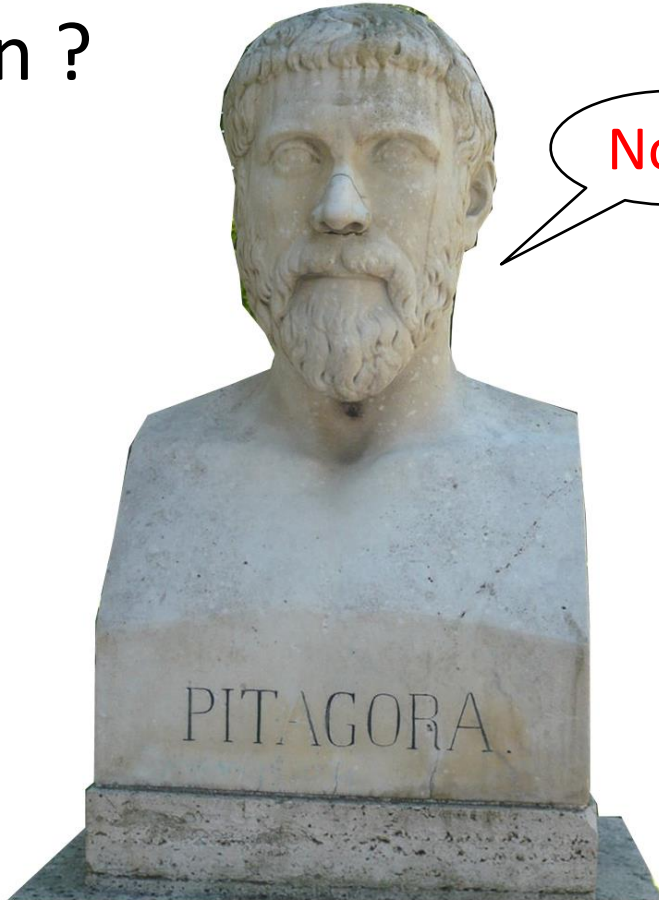
Congruent numbers: positive integers k for which there exists a right triangle having area k and rational sides.

(Formerly M3747)

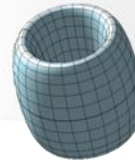
42

5, 6, 7, 13, 14, 15, 20, 21, 22, 23, 24, 28, 29, 30, 31, 34, 37, 38, 39, 41, 45, 46, 47, 52, 53, 54, 55, 56, 60, 61, 62, 63, 65, 69, 70, 71, 77, 78, 79, 80, 84, 85, 86, 87, 88, 92, 93, 94, 95, 96, 101, 102, 103, 109, 110, 111, 112, 116, 117, 118, 119, 120, 124, 125, 126 ([list](#); [graph](#); [refs](#); [listen](#); [history](#); [text](#); [internal format](#))

Ces nombres congruents
c'est un truc de Pythagore
non ?



Non !



Café scientifique

Exposé sur un thème choisi, suivi d'un échange

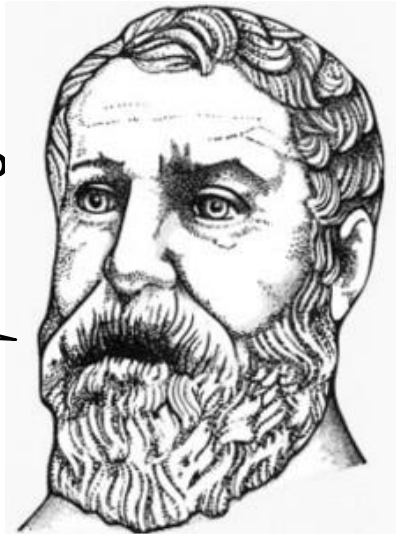
Alors, de Euclide ?



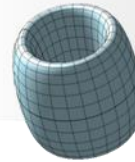
Non plus !

Au moins, de Héron ?

Pas moi !



C'est qui encore Héron ?



Héron d'Alexandrie



portrait imaginaire du XVII^e siècle

Naissance	I ^{er} siècle apr. J.-C. Alexandrie (Égypte)
Résidence	Alexandrie
Domaines	Mathématiques , mécanique
Renommé pour	Éolipyle , Formule de Héron

[modifier](#)



Un triangle est appelé triangle de Héron si chacune des longueurs de ses côtés ainsi que son aire sont exprimés en nombres rationnels.

Formule de Héron : l'aire d'un triangle de côtés a, b, c et périmètre $p = a + b + c$ est égale à :

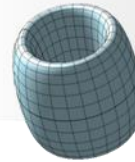
$$\frac{1}{4} \sqrt{p \times (p - 2a) \times (p - 2b) \times (p - 2c)}$$

E.g. : l'aire d'un triangle équilatéral de côté a est égale à :

$$\frac{\sqrt{3}}{4} a^2$$

(D'où le fait qu'aucun triangle de Héron peut être équilatéral).

Les triplets pythagoriciens



Tout triangle rectangle rationnel de côtés $a < b < c$ est Héron
puisque son aire est égale à $\frac{1}{2}ab$

Les triangles rectangles ont été construits par Euclide.
Leurs côtés a, b, c sont proportionnels à

$$a = m^2 - n^2$$

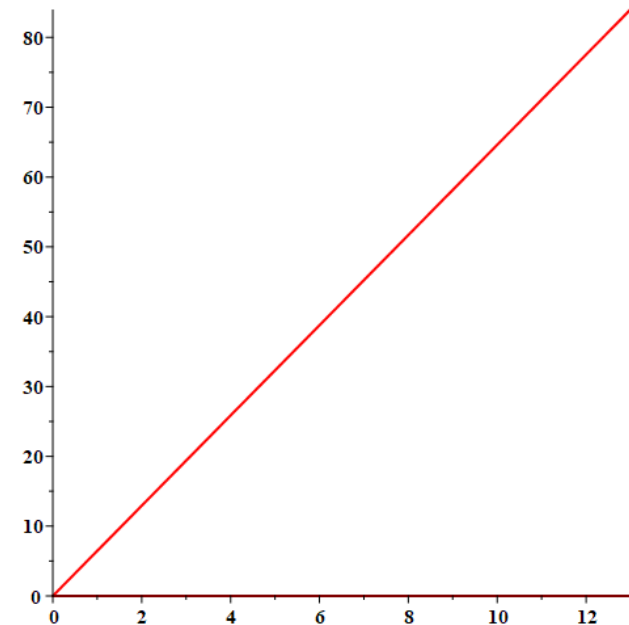
$$b = 2mn$$

$$c = m^2 + n^2$$

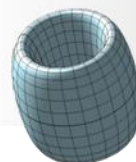
où m, n sont des entiers positifs satisfaisant

$$m > n \text{ et } \text{pgcd}(m, n) = 1$$

E.g. $(m, n) = (7, 6)$ donne $(a, b, c) = (13, 84, 85)$,
avec aire 546.



Petite exercice: trouver m, n donnant triangle rectangle $(3, 4, 5)$.



THEOREM OF THE DAY



La Formule Pythagoricien d'Euclide Pour chaque triplet pythagoricien (a, b, c) (c'est à dire, entiers naturels vérifiant $a^2 + b^2 = c^2$) il y a un unique triplet (k, m, n) d'entiers naturels, $m > n$, où m, n sont premier entre eux et sont de parités différentes, tel que

$$a = k(m^2 - n^2), \quad b = 2kmn, \quad c = k(m^2 + n^2).$$

Le problème du pharaon de Saint-Exupéry

Un pharaon décida d'ériger, en utilisant exclusivement des pierres taillées en cube de 1m de côté, une stèle massive géante en forme de parallélépipède rectangle dont la hauteur fut égale à la diagonale de la base. Il ordonna à un certain nombre de fonctionnaires de rassembler chacun une part égale des matériaux exactement prévus pour l'érection de la stèle. Puis il mourut. Les archéologues ne retrouvèrent qu'un seul de ces dépôts. Ils y dénombrèrent 348 960 150 cubes de pierres. Ils ne surent rien des autres dépôts, sinon que le nombre total des dépôts était, pour des raisons mystiques, un nombre premier. Cette découverte leur permit cependant de calculer rigoureusement les dimensions de la stèle prévue.

L'illustration montre un projet plus modeste, qui propose un parallélépipède dont les dimensions sont $20 \times 21 \times 29$, avec $29^2 = 20^2 + 21^2$, en accord avec l'exigence du pharaon. Supposons que les archéologues ne trouvent qu'un dépôt de $B = 6090$ cubes de pierres appartenant à un des p fonctionnaires, p un nombre premier. Ils peuvent déterminer les dimensions du parallélépipède ainsi : la base est $a \times b$, et la hauteur est c , où (a, b, c) est un triplet pythagoricien. Or, $a \times b \times c = p \times B$, alors l'application de la formule de Euclid nous donne k, m et n tel que $2k^3mn(m^2 - n^2)(n^2 + m^2) = p \times 2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 29$. L'un de m et n est pair donc le côté gauche de cette équation est divisible par 4, ce qui implique que $p = 2$. Nous pouvons donc écrire $k^3mn(m - n)(m + n)(n^2 + m^2) = 2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 29$. De plus, les cinq derniers facteurs à gauche sont premiers entre eux : par exemple, si un premier quelconque, disons q , divise m et $m - n$ alors q doit également diviser n , mais la formule affirme que m et n sont premier entre eux. D'où il suit que $k = 1$ et chacun des autres facteurs égale à un choix différent entre 2, 3, 5, 7 et 29. Evidemment, $m^2 + n^2$ ne peut avoir que la valeur 29, et les valeurs restantes suivent : $m = 5$ and $n = 2$.



La formule d'Euclide figure dans le livre 10 des *Éléments* où elle sert comme Lemma 1 pour la démonstration de Proposition 29. Le paramètre k ne fait pas partie de la formule originale étant ajouté afin de générer les triplets 'imprimittifs', tel que $(9, 12, 15) = 3 \times (3, 4, 5)$.

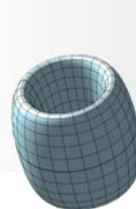


Lien externe : lescoursdemathsdepij.h.monsite-orange.fr/ : voir sous Algèbre Générale.

À lire : *Faire des mathématiques avec l'histoire au lycée*, by Évelyne Barbin, Ellipses, 2019.

 merci à G.M.


Construction des triangles de Héron



Brahmagupta



Brahmagupta

Naissance	598 Bhillamala (Bhinmal (en)), Rajasthan (Inde)
Décès	670
Nationalité	Indien
Domaines	Mathématiques et astronomie
Renommé pour	le <i>Khandakhādyaka</i> et le <i>Brāhmasphuṭasiddhānta</i>

[modifier](#)



Les triangles de Héron sont précisément ceux dont les côtés sont proportionnels à

$$a = n(m^2 + k^2)$$

$$b = m(n^2 + k^2)$$

$$c = (m + n)(mn - k^2)$$

où m , n et k sont des entiers positifs satisfaisant

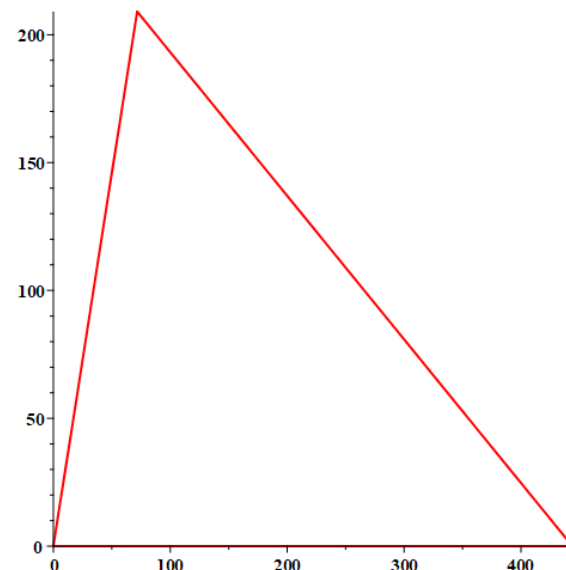
$$m \geq n \geq 1, \quad mn > k^2 \geq 1,$$

$$\text{et } \text{pgcd}(m, n, k) = 1$$

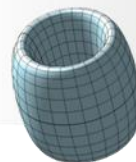
E.g. $(m, n, k) = (7, 6, 5)$ donnent

$$(a, b, c) = (444, 427, 221)$$

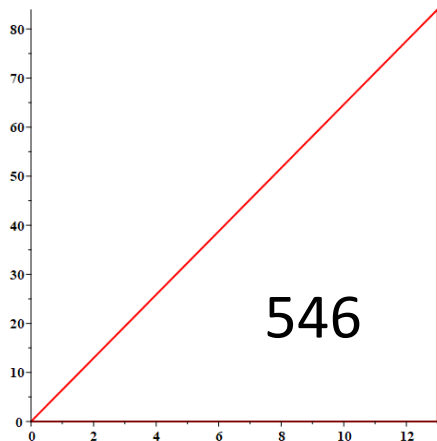
dont l'aire est de 46410.



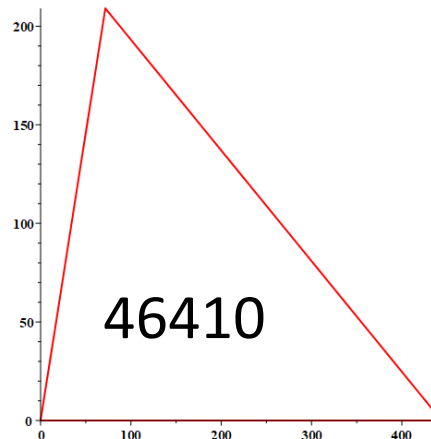
Alors, où sommes nous ...



Café scientifique
Exposé sur un thème choisi, suivi d'un échange



Congruent: aire de (13, 84, 85)

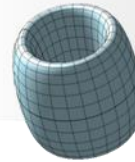


Pas congruent: aucun triangle rectangle rationnel a cette aire

Rappel : un nombre entier positif est congruent s'il est l'aire d'un triangle rectangle rationnel quelconque

Mais comment s'assurer que 46410 n'est pas un nombre congruent ?
On cherche **un moyen pratique** de déterminer si ou non un nombre donné est congruent

Et c'est bien le plus ancien problème mathématique non résolu ?



Café scientifique
Exposé sur un thème choisi, suivi d'un échange

John H. Coates
FRS



Coates in 2006

Born	John Henry Coates 26 January 1945 Possum Brush, New South Wales, Australia
Died	9 May 2022 (aged 77) Cambridge, England
Alma mater	Australian National University (BSc) Trinity College, Cambridge (PhD)
Known for	Iwasawa theory <i>p</i> -adic L-functions
Spouse	Julie Turner ^[1]
Awards	FRS (1985) Senior Whitehead Prize (1997)
Fields	Mathematics
Institutions	University of Cambridge Harvard University Université de Paris, Orsay École Normale Supérieure Stanford University ^[1]

“The congruent number problem, the written history of which can be traced back at least a millennium, is the oldest unsolved major problem in number theory, and perhaps in the whole of mathematics.”

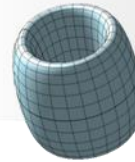
John H. Coates

Le problème des nombres congruents, duquel l'histoire écrite se remonte d'au moins un millénaire est le plus ancien problème non résolu de la théorie des nombres, et peut-être des mathématiques entières

Donc on parle de le 10^e ou le 11^e siècle. Ce qui veut dire **les mathématiques arabes.**

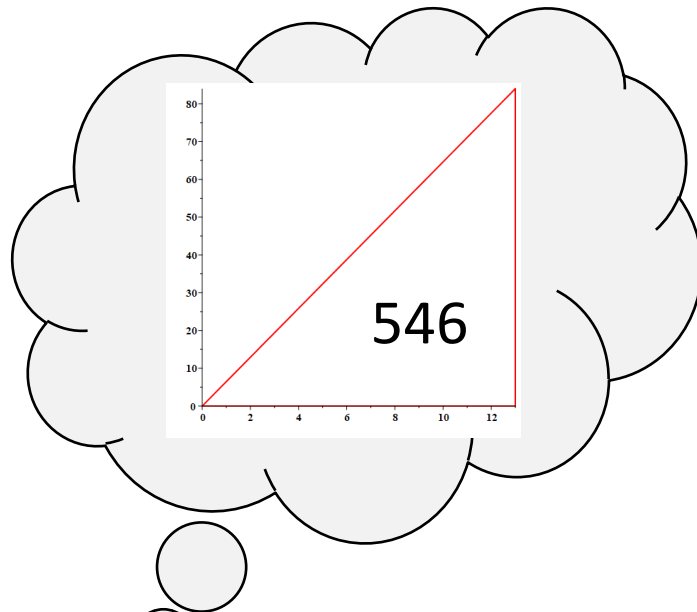


De la Grèce à l'Iran et de la géométrie à l'arithmétique !



Café scientifique
Exposé sur un thème choisi, suivi d'un échange

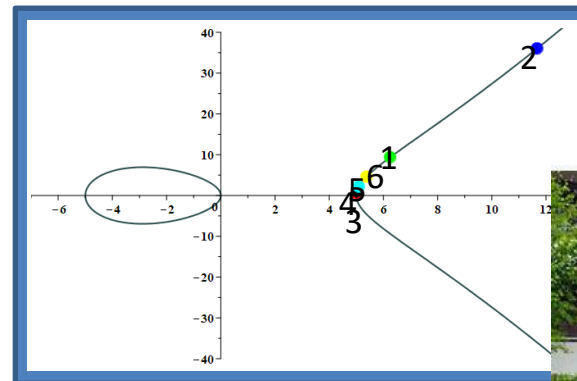
Comme tout problème profond en mathématique, les nombres congruent se manifeste dans des guises très différentes les unes des autres.



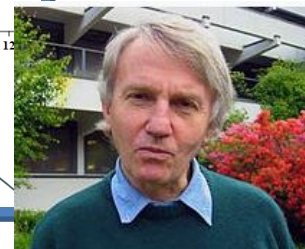
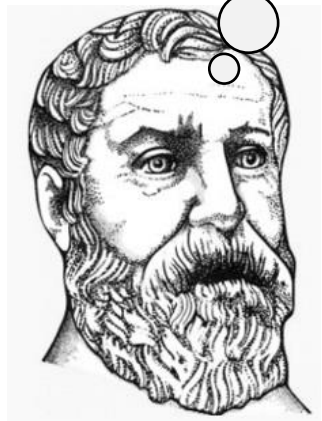
$$(31/6)^2, (41/6)^2, (49/6)^2$$

!

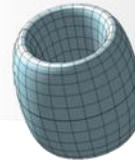
?



... et aux
frontières des
maths de le 20^e
siècle !



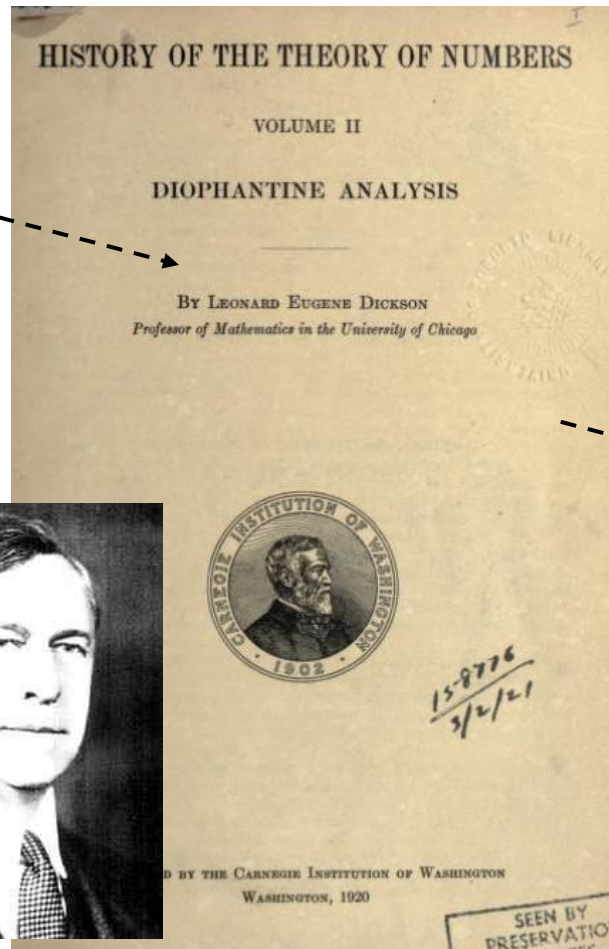
En route donc, pour la Perse de le 10^e siècle !



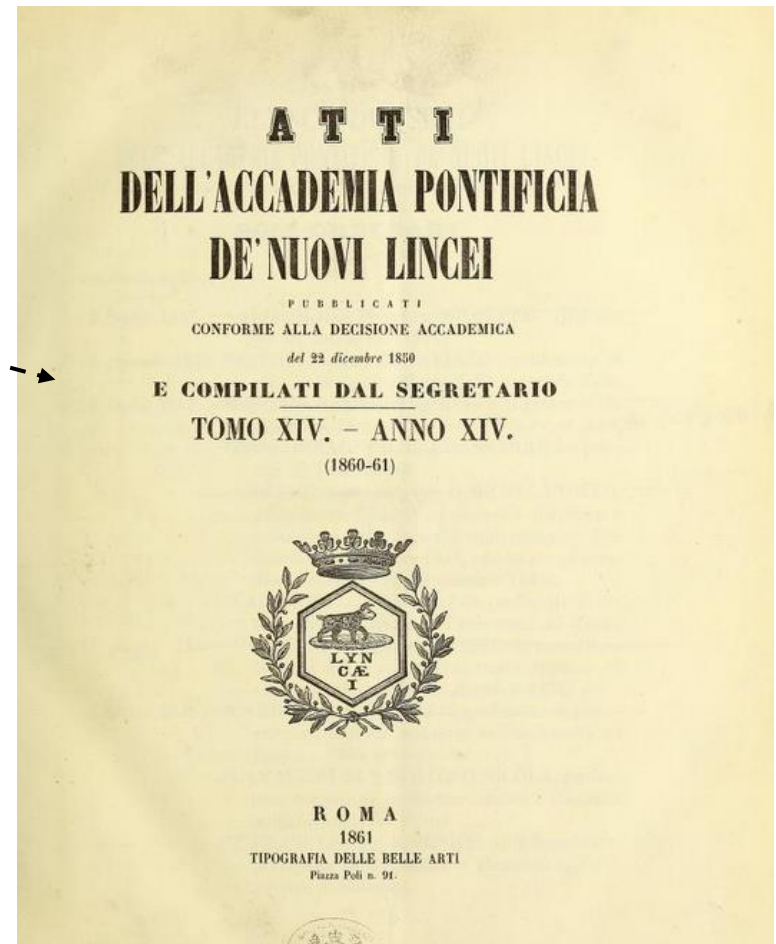
Café scientifique
Exposé sur un thème choisi, suivi d'un échange

(Pas aussi facile que ça !)

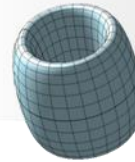
John H. Coates
FRS



Leonard Eugene Dickson (1874 – 1954)

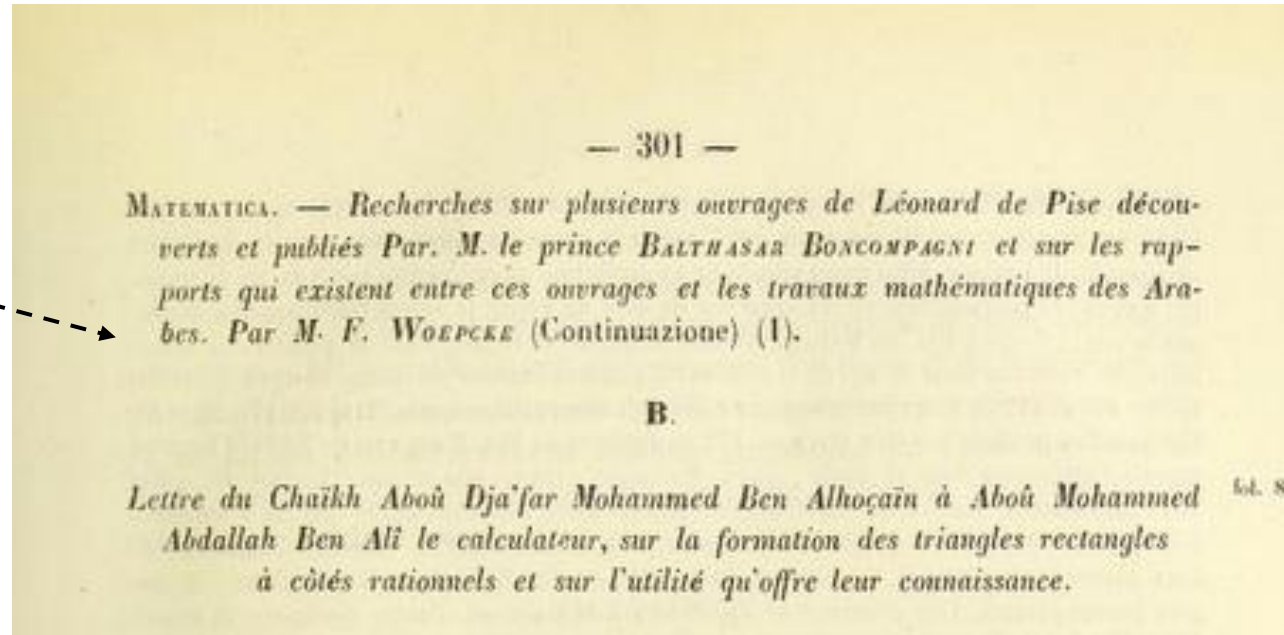
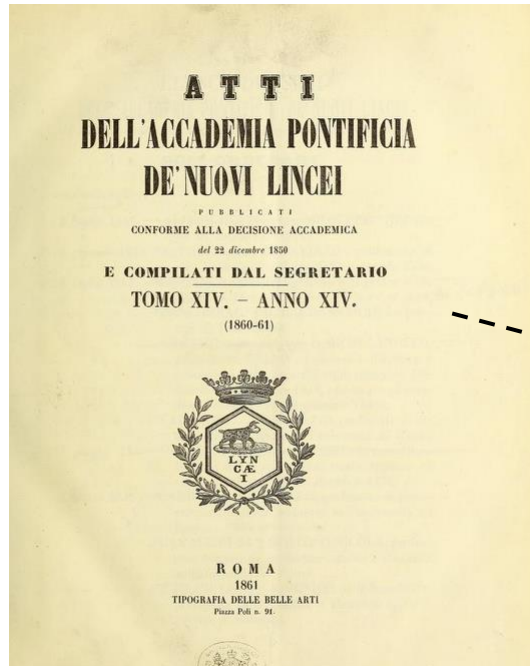


Chaïkh Aboû Dja'far Mohammed Ben Alhoçaïn



Café scientifique

Exposé sur un thème choisi, suivi d'un échange



Franz Woepcke

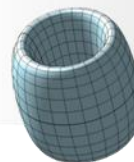
Biographie

Naissance	6 mai 1826  Dessau 
Décès	25 mars 1864  (à 37 ans) Paris 
Nationalité	Allemande 
Formation	Université Humboldt de Berlin 
Activités	Mathématicien, historien des mathématiques 

J'ai déjà expliqué que (les arguments) qu'avait proposés Aboû Mohammed Alkhodjandi, que Dieu soit miséricordieux envers lui, dans sa démonstration (du théorème) que de l'addition de deux nombres cubes il ne résulte pas un nombre cube, sont défectueux et inexacts, et que la règle qu'il a donnée pour la connaissance des triangles rectangles à côtés rationnels, est particulière et non générale. Vous avez lu, ô mon frère que Dieu assiste, (la correspondance) qui a été échangée entre moi et lui sur cette matière. Cependant je n'ai pas expliqué comment on forme ces triangles, par quelle méthode on les connaît et les produit, et quelle est l'utilité que l'on tire de leur connaissance, utilité qui est le but et l'objet de (la théorie de) ces (triangles). Or, il se peut que vous éprouviez le besoin de prendre connaissance de cela; je l'ai donc exposé pour vous, et je vous l'ai envoyé, afin, que vous le lisiez, si

fol. 89

Aboû Dja'far Mohammed Ben
Alhoçaïn
alias **Abu Jafar al-Khazin**



Café scientifique
Exposé sur un thème choisi, suivi d'un échange

mathshistory.st-andrews.ac.uk



MacTutor

[HOME](#) [BIOGRAPHIES](#) [HISTORY TOPICS](#) [MAP](#) [CURVES](#) [SEARCH](#)

Abu Jafar Muhammad ibn al-Hasan Al-Khazin

Quick Info

Born
about 900
[Khurasan \(eastern Iran\)](#)

Died
about 971
possibly Rayy

Summary
Al-Khazin was an Islamic m



MacTutor

[HOME](#) [BIOGRAPHIES](#)

A étudié lui aussi les nombres congruents

Abu Bekr ibn Muhammad ibn al-Husayn Al-Karaji

Quick Info

Born
13 April 0953
[Baghdad \(now in Iraq\)](#)

Died
about 1029

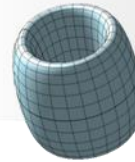
Summary

Al-Karaji was an Islamic mathematician who wrote about the work of earlier



[View one larger picture](#)

Mathématiques de Abu Jafar al-Khazin



This seems to have motivated further correspondence on number theory between al-Khazin and other Arabic mathematicians. Results by al-Khazin here are interesting indeed. His main result is to:-

... show how, if we are given a number, to find a square number so that if the given number were added to it or subtracted from it the result would be square.

In modern notation the problem is given a natural number a , find natural numbers x, y, z so that $x^2 + a = y^2$ and $x^2 - a = z^2$. Al-Khazin proves that the existence of x, y, z with these properties is equivalent to the existence of natural numbers u, v with $a = 2uv$, and $u^2 + v^2$ is a square (in fact $u^2 + v^2 = x^2$). The smallest example of a satisfying these conditions is 24 which al-Khazin gives

$$5^2 + 24 = 7^2, 5^2 - 24 = 1^2.$$

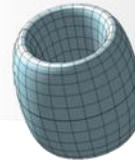
mathshistory.st-andrews.ac.uk

Son résultat principal est de

... montrer, pour un nombre [entier positif] donné, comment trouver un nombre carré tel que l'addition et la soustraction du nombre donné produisent de nouveau un nombre carré.

En notation moderne le problème est, donné un nombre entier positif a , trouver nombres entiers positifs x, y, z tel que $x^2 + a = y^2$ and $x^2 - a = z^2$. Al-Khazin démonte que l'existence de x, y, z avec de tel propriétés est équivalent à l'existence des nombres entiers positifs u, v avec $a = 2uv$ et $u^2 + v^2$ un nombre carré.

Depuis la Perse en Europe



Café scientifique

Exposé sur un thème choisi, suivi d'un échange

 <https://www2.cms.math.ca/Reunions/summer05/abs/discours.html#hm>

Histoire des mathématiques de l'Islam médiéval à l'Europe de la Renaissance [\[PDF\]](#)

- Christopher Baltus - [When is a Negative Really a Negative?](#)
- Lawrence A. D'Antonio - [Number Theory from Fibonacci to 17th Century Safavid Persia: a question of transmission of knowledge](#)
- Jozsef Hadarits - [Diamonds, Rings, and Squares: Eastern Magic in Western Hands](#)
- Odile Kouteynikoff - [Guillaume Gosselin, an algebraist in Renaissance France](#)
- Federica La Nave - [Bombelli and L'Algebra](#)
- Glen van Brummelen - [Al-Samaw'al and the Errors of the Astronomers: Where the Mistake Really Lies](#)

Al-Kharaji

According to the fact that Al-Khwarizmi founded Algebra during the 9th century, it is not surprising that, when being translated into Arabic in the late 9th century by Lebanese Ibn Luqa whose native language was Greek, Diophante's *Arithmetics* seemed to be considered as a treatise about Algebra since algebraic vocabulary and way of thinking were most widely shared. Only few people understood that it was actually an arithmetic treatise: Al-Khazin (900-971) did, and therefore he is one of those who laid the foundations for the integer Diophantine analysis. We know that Jean de Palerme submitted Al-Khazin's problem about congruent numbers to Fibonacci, who then wrote *Liber Quadratorum*.

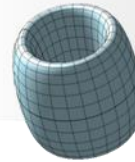
Maître Jean de Palerme

Fibonacci, *Liber Quadratorum* (1125)

Quand Maître Dominique m'a conduit aux pieds de votre majesté céleste, prince très glorieux, seigneur Frédéric, je rencontrai Maître Jean de Palerme; il me proposa une question qui lui était venue à l'esprit, appartenant autant à la géométrie qu'à l'arithmétique : trouver un nombre carré tel que, quand cinq est ajouté ou soustrait, on trouve encore des carrés.

hist-math.fr/users/Histoires/Arithmetique/fibonacci.pdf

La génie de Fibonacci

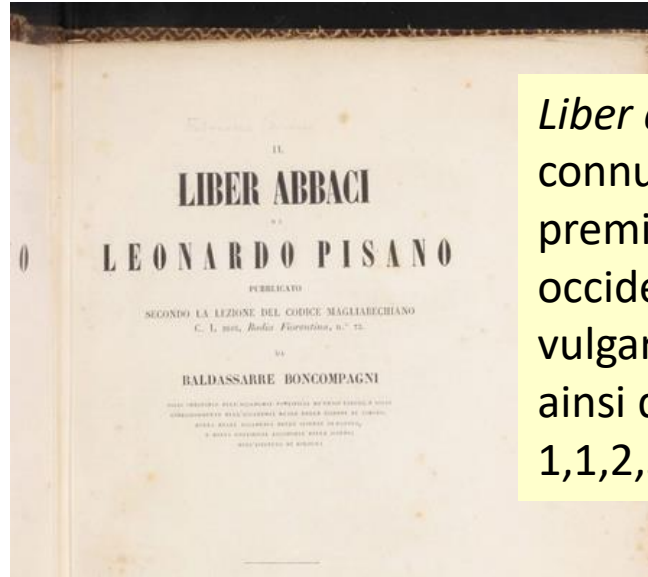


Café scientifique

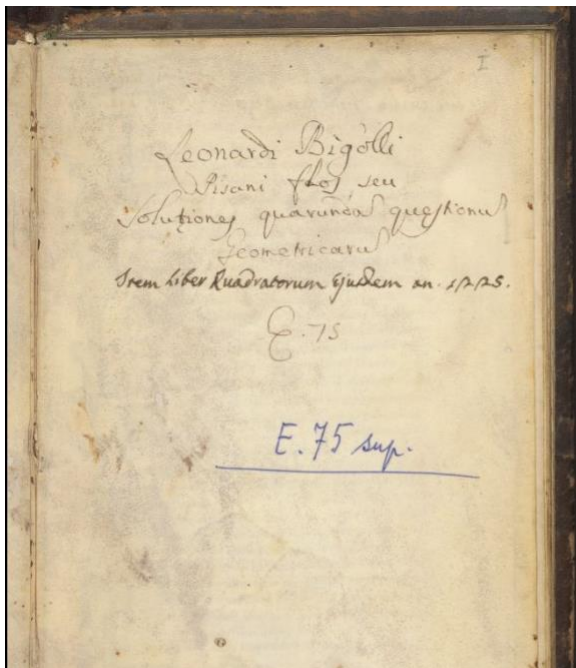
Exposé sur un thème choisi, suivi d'un échange



Leonardo Pisano Fibonacci (1170 – 1250)



Liber abaci, Son œuvre le plus connu, de 1202: l'un des premiers ouvrages d'Europe occidentale chrétienne à vulgariser les chiffres arabes, ainsi que la fameuse suite 1,1,2,3,5,8, ...



<https://ambrosiana.comperio.it/opac/detail/view/ambro:catalog:71016> ambrosiana.comperio.it/biblioteca-digitale/



Manoscritti

Fibonacci, Leonardo <ca. 1170–ca. 1240>
Liber quadratorum

▼ Dettagli

Descrizione fisica: 19r–39v

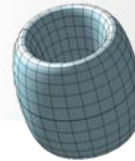
Fa parte di: E 75 sup. ; 2 (Nota: DBI 47, 359–362)

Nota:

- Thorndike–Kibre, col. 316
- DBI 47, 359–362

Liber quadratorum, (Livre des carrés) son chef d'œuvre, de 1225: consacrée aux équations de degré 2 (avec des puissances de 2)

Les « congrua » de Fibonacci



PROPOSITION XII. THEOREM. If $x + y$ is even, $xy(x + y)(x - y)$ is divisible by 24; and in any case $4xy(x + y)(x - y)$ is divisible by 24. A number of this form is called by Leonardo a *congruum*, and he proceeds to show that it furnishes the solution to a problem proposed by Johannes of Palermo.

PROPOSITION XIII. PROBLEM. "To find a number which, being added to, or subtracted from, a square number, leaves in either case a square number." Leonardo's solution of this, the problem which had stimulated him to write the *Liber Quadratorum*, is so very ingenious and original that it is a matter of regret that its length prevents its inclusion here. It is not too much to say that this is the finest piece of reasoning in number theory of which we have any record, before the time of Fermat.



Proposition XIII. « Pour trouver un nombre [entier positif] tel que son addition et sa soustraction d'un nombre carré produisent de nouveau un nombre carré. »

La solution de Leonardo ... est le meilleur passage de raisonnement en théorie des nombres ... avant l'époque de Fermat.

JOURNAL ARTICLE **OPEN ACCESS**

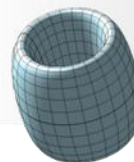
Leonardo of Pisa and his Liber Quadratorum

R. B. McClenon



The American Mathematical Monthly
Vol. 26, No. 1 (Jan., 1919), pp. 1-8 (8 pages)

D'ou « congruent »



Alors, le mot « congruent » est dérivé de l'emploi de Fibonacci du terme «congruum » pour connoter le raison d'un suite arithmétique de trois carrés entiers.

(*Congruum* du latin *congruere* qui veut dire «congréger»)

Suite arithmétique : une suite de trois nombres entiers ou plus, chacun étant la même distance du précédent, cette distance étant appelé la raison de la suite.

1, 2, 3, ...

Raison 1

5, 12, 19, 26, ...

Raison 7

5, 11, 17, 23, 29

Raison 6

1, 25, 49

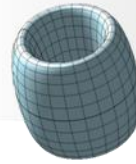
Raison $24 = 6 \times 2^2$

31^2 , 41^2 , 49^2

Raison $720 = 5 \times 12^2$

(D'ailleurs Pierre de Fermat a démontré en 1640 qu'aucune suite arithmétique de quatre nombres carré peut exister)

Et maintenant, à s'émerveiller !



Une suite arithmétique de carrés entiers u^2, v^2, w^2 , ayant raison $A \times n^2$, correspond à un triangle rectangle de côtés rationnel a, b, c dont l'aire est A .

Plus précisément : $(u, v, w) \rightarrow \text{triangle} \left(\frac{w-u}{n}, \frac{w+u}{n}, \frac{2v}{n} \right)$.

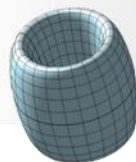
Inversement: un triangle rectangle de côtés rationnel a, b, c dont l'aire est c correspond à un congruum en multipliant par un carré approprié

Plus précisément : $(a, b, c) \rightarrow \text{congruum} \left(\left(\frac{b-a}{2} \right)^2, \left(\frac{c}{2} \right)^2, \left(\frac{b+a}{2} \right)^2 \right) \times n^2$.

E.g. $(1, 25, 49)$, raison $24 = 6 \times 2^2 \rightarrow \text{triangle} \left(\frac{7-1}{2}, \frac{7+1}{2}, \frac{2 \times 5}{2} \right) = (3, 4, 5)$, avec l'aire 6.

$(3, 4, 5)$, aire 6 $\rightarrow \text{congruum} \left(\left(\frac{4-3}{2} \right)^2, \left(\frac{5}{2} \right)^2, \left(\frac{4+3}{2} \right)^2 \right) \times 2^2 = (1, 25, 49)$

5 le premier nombre congruent



Pierre de Fermat démontrera en 1640 que 1, 2 et 3 ne peuvent pas être congruent ni, de suite, 4, 9, 16, ...

Or $31^2, 41^2, 49^2$ est une suite arithmétique avec raison $5 \times 12^2 = 720$.

Donc 5 est congruent : il est l'aire d'un triangle rectangle rationnel. Et ce triangle est trouvé ainsi :

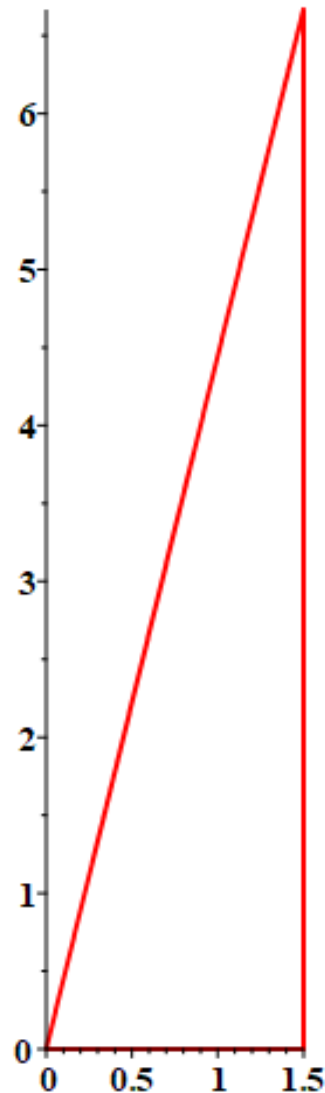
$$\left(\frac{49 - 31}{12}, \frac{49 + 31}{12}, \frac{2 \times 41}{12} \right) = \left(\frac{3}{2}, \frac{20}{3}, \frac{41}{6} \right)$$

Les nombres congruent 5 et 6 sont déjà connus aux mathématiciens arabes du 10^e siècle.

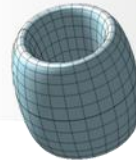
Fibonacci a pu ajouter 7 en trouvant la suite arithmétique

$$113^2, 337^2, 463^2$$

dont la raison est de $7 \times 120^2 = 100800$.



Et si on a tous les congrua ?



En effet, Fibonnaci a trouvé un moyen de construire systématiquement tous les congrua, c'est-à-dire, tous les suites arithmétiques de trois nombres entiers carrés.

En conséquence, donné un nombre entier positif on peut déterminer si ou non c'est la raison d'une telle suite.

Or, tout congruum correspond à un nombre congruent et vice versa. N'était-t-il donc pas possible de identifier également systématiquement tous les nombres congruent ?

Hélas non, à cause de ce fâcheux carré qui s'affiche dans la raison de la suite arithmétique

E.g. 13 c'est le prochain nombre congruent grâce au fait qu'il y a un suite arithmétique avec raison $13 \times 19380^2 = 4882597200$. Mais comment savoir chercher 13 dans une telle botte de foin !?

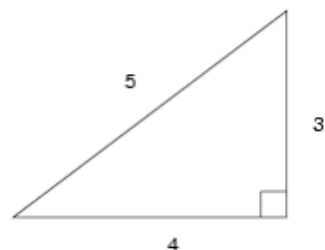
Et néanmoins ...

A Trillion Triangles

September 22, 2009 -- Mathematicians from North America, Europe, Australia, and South America have resolved the first one *trillion* cases of an ancient mathematics problem. The advance was made possible by a clever technique for multiplying large numbers. The numbers involved are so enormous that if their digits were written out by hand they would stretch to the moon and back. The biggest challenge was that these numbers could not even fit into the main memory of the available computers, so the researchers had to make extensive use of the computers' hard drives.

According to Brian Conrey, Director of the [American Institute of Mathematics](#), "Old problems like this may seem obscure, but they generate a lot of interesting and useful research as people develop new ways to attack them."

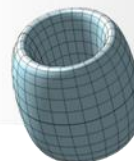
The problem, which was first posed more than a thousand years ago, concerns the areas of right-angled triangles. The surprisingly difficult problem is to determine which whole numbers can be the area of a right-angled triangle whose sides are whole numbers or fractions. The area of such a triangle is called a "congruent number." For example, the 3-4-5 right triangle which students see in geometry has area $\frac{1}{2} \times 3 \times 4 = 6$, so 6 is a congruent number. The smallest congruent number is 5, which is the area of the right triangle with sides $\frac{3}{2}$, $\frac{20}{3}$, and $\frac{41}{6}$.



The 3-4-5 triangle has area 6.

The first few congruent numbers are 5, 6, 7, 13, 14, 15, 20, and 21. Many congruent numbers were known prior to the new calculation. For example, every number in the sequence 5, 13, 21, 29, 37, ..., is a congruent number. But other similar looking sequences, like 3, 11, 19, 27, 35, ..., are more mysterious and each number has to be checked individually.

The calculation found 3,148,379,694 of these more mysterious congruent numbers up to a trillion.



Café scientifique

Exposé sur un thème choisi, suivi d'un échange

Press release in
[MSWord](#) or [plain text](#).
[Versión en español](#)

Computer details: how
to
[multiply large numbers](#)

sous réserve de la
conjecture de Birch
et Swinnerton-Dyer

Congruent number theta coefficients to 10^{12}

Robert Bradshaw, William B. Hart *, David Harvey,
Gonzalo Tornaria † Mark Watkins ‡

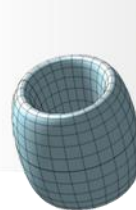
September 23, 2009

Abstract

We report on a computation of congruent numbers, which subject to the Birch and Swinnerton-Dyer conjecture is an accurate list up to 10^{12} . The computation involves multiplying large theta series as per Tunnell (1983). The first method, which we describe in some detail, uses a multimodular disk based technique for multiplying polynomials out-of-core which minimises expensive disk access by keeping data truncated. The second technique uses "Bailey's four-step" Fast Fourier method in combination with compression of the data to disk in intermediate stages.

Math details:
[triangles and elliptic curves](#)

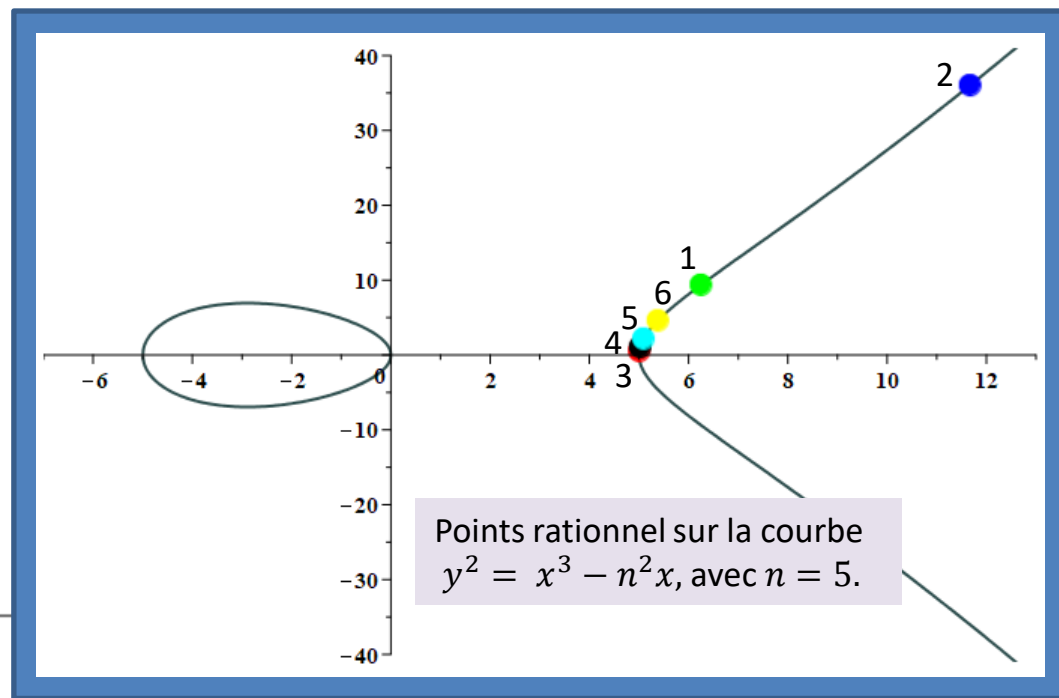
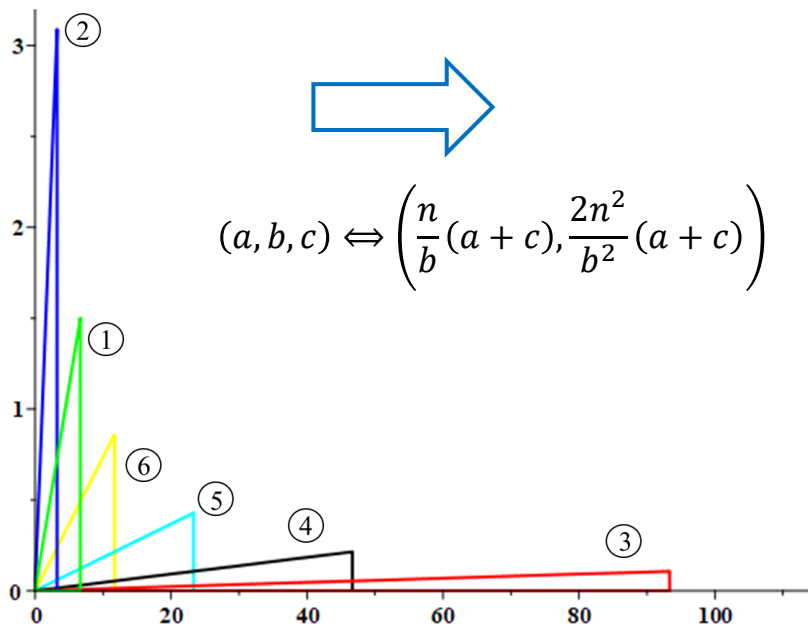
Mille milliards de nombres congruents alors ?

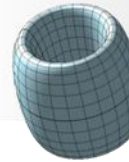


Nombres congruents et courbes elliptiques

Pour les triangles de Héron il y a de nouveau une correspondance étonnante, cette fois avec certaines équations de degré (puissance) 3.

Ci-dessous, notre triangle rectangle de aire 5 se retrouve (avec des copains!) en forme de point rationnel sur une courbe elliptique.



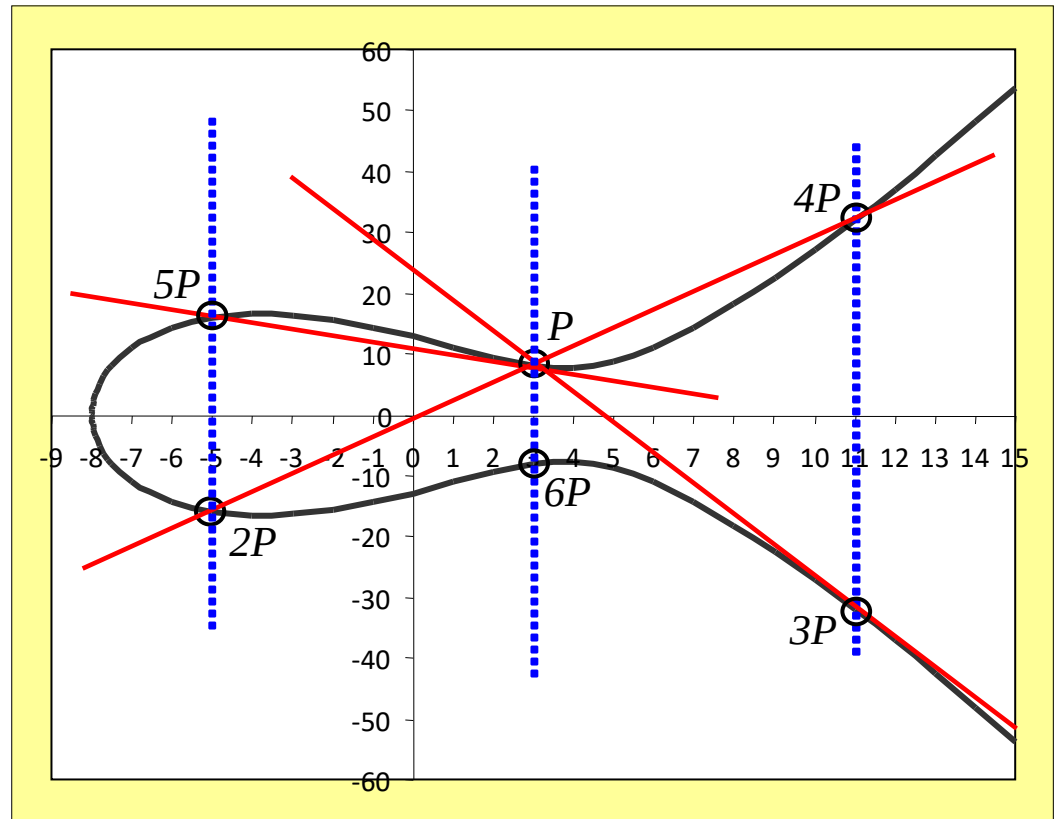
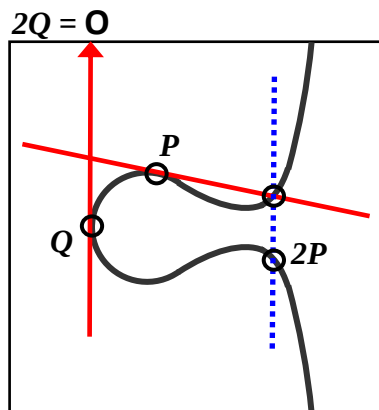
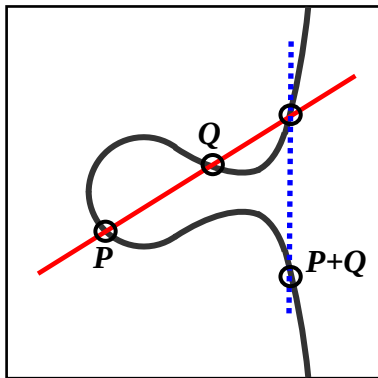


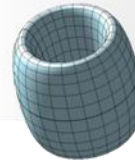
Arithmétique façon 20^e siècle

Une nouvelle conception de l'addition se propose sur les courbes

$$y^2 = ax^3 + bx + c$$

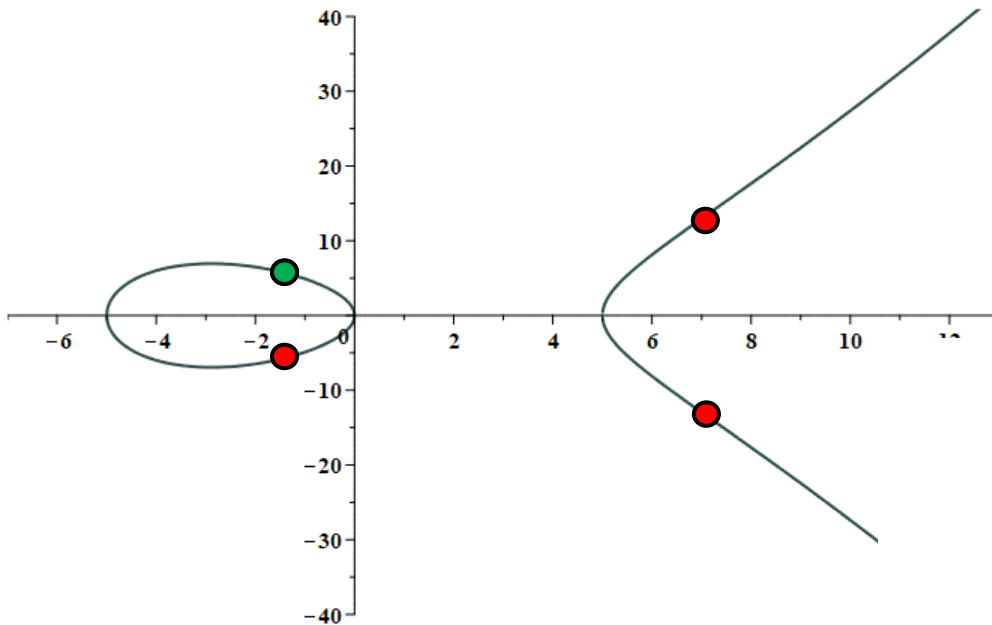
celles qu'on appelle les courbes elliptiques. Et les points rationnel y jouent une rôle très particulier !





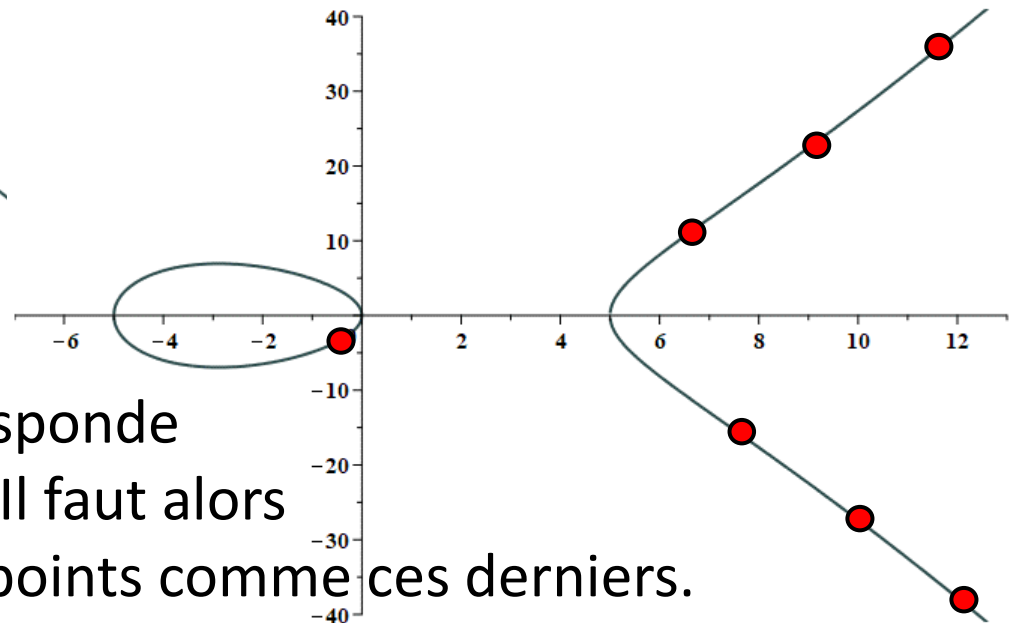
Rang d'une courbe elliptique

On « additionne » à maintes reprises un point rationnel à soi-même.
Soit on se retrouve au point du départ après n étapes ...

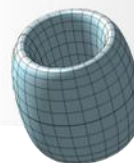


... soit on n'y se retourne pas.

Or, un nombre congruent correspond
à un infini de points rationnels. Il faut alors
que notre courbe possède des points comme ces derniers.

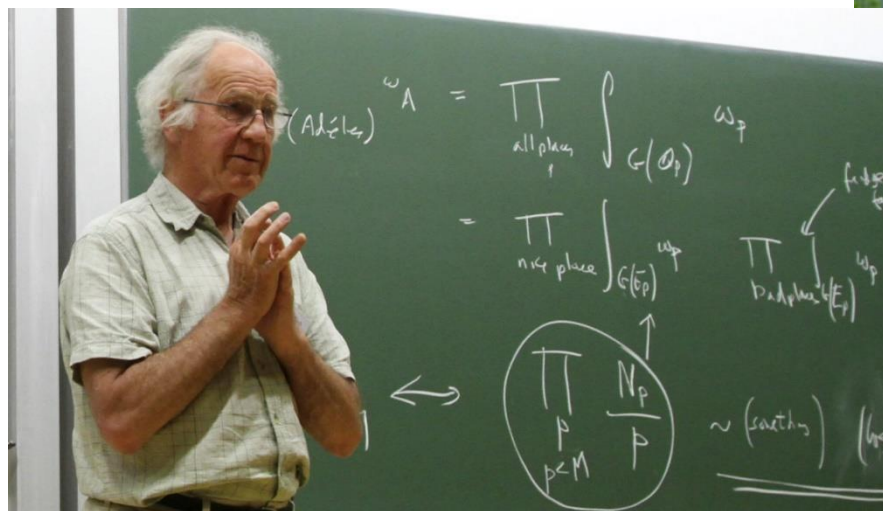


Birch et Swinnerton-Dyer et Jerrold Bates Tunnell



Café scientifique
Exposé sur un thème choisi, suivi d'un échange

Un nombre n est congruent si et seulement si la courbe elliptique $y^2 = x^3 - n^2x$ possède un infini de points rationnel.
Mais personne ne sait comment identifier de tels courbes, au moins que...



Bryan John Birch (1927 – 2018)

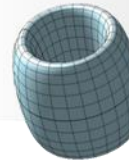


Peter Swinnerton-Dyer (1927 – 2018)



Jerrold Bates Tunnell
(1950 – 2022)

... la fameuse conjecture de Birch et Swinnerton-Dyer est
vraie !



Le théorème de Tunnell

Soit n un nombre entier sans diviseurs carrés et notons $S_n(a, b, c)$ le nombre de solutions entières (x, y, z) de l'équation $ax^2 + by^2 + cz^2 = n$. Alors une condition nécessaire pour que n soit un nombre congruent est que

$$\begin{aligned} S_n(2,1,8) &= 2S_n(2,1,32) && \text{si } n \text{ est impair,} \\ \text{et } S_n(8,2,16) &= 2S_n(8,2,64) && \text{si } n \text{ est pair} \end{aligned}$$

En plus, cette condition est aussi suffisante si la conjecture de Birch et Swinnerton-Dyer est vraie.

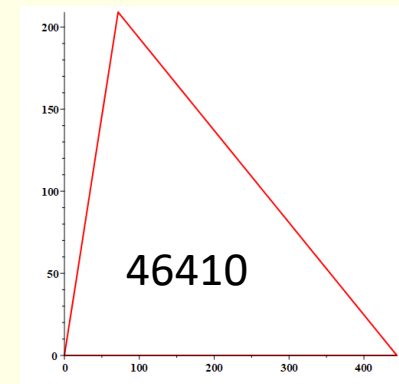
1 n'est pas congruent car $2x^2 + y^2 + 8z^2 = 1$ et $2x^2 + y^2 + 32z^2 = 1$ ont tous les deux seulement une solution entière, c'est-à-dire $(0, \pm 1, 0)$.

157 est congruent (selon BSD) car $2x^2 + y^2 + 8z^2 = 157$ possède deux fois le nombre de solutions de $2x^2 + y^2 + 32z^2 = 157$: c'est zéro dans les deux cas !

26 n'est pas congruent car $8x^2 + 2y^2 + 16z^2 = 26$ a 12 solutions $(\pm 1, \pm 1, \pm 1), (\pm 1, \pm 3, 0)$ tandis que $8x^2 + 2y^2 + 64z^2 = 26$ a 4 : $(\pm 1, \pm 3, 0)$

34 est congruent (selon BSD) car $8x^2 + 2y^2 + 16z^2 = 34$ a 8 solutions $(0, \pm 3, \pm 1), (\pm 2, \pm 1, 0)$ tandis que $8x^2 + 2y^2 + 64z^2 = 34$ a 4 : $(\pm 2, \pm 1, 0)$.

Notre exemple de ci-dessus :

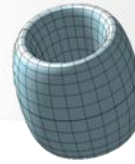


Pas congruent:

$$S_{46410}(8,2,16) = 256$$

$$S_{46410}(8,2,64) = 160$$

Fin



Café scientifique

Exposé sur un thème choisi, suivi d'un échange

