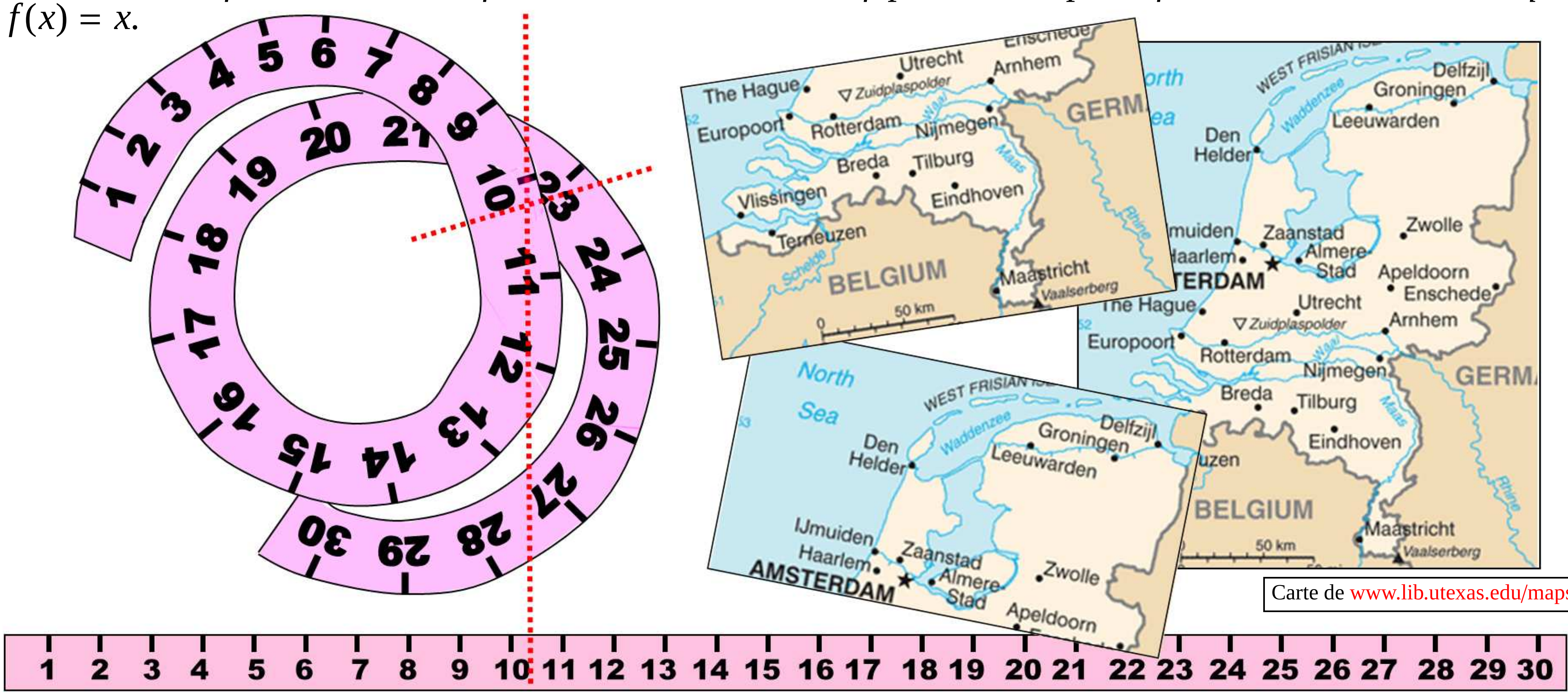
THEOREM OF THE DAY

Théorème du point fixe de Brouwer *Soit B une boule fermée dans dans un espace euclidien de dimension n, et soit $f : B \longrightarrow B$ une fonction continue. Alors f possède un point fixe : il existe $x \in B$ tel que $f(x) = x$.*



Carte de www.lib.utexas.edu/maps/

En dimension 1, on peut prendre pour B l'intervalle $[0, 1]$ de tous les réels de 0 à 1 inclus. Mais le théorème s'applique à n'importe quel ensemble homéomorphe à B (donc fermé, borné, sans trous). Le théorème de Brouwer peut être visualisé avec deux mètres rubans initialement superposés. La fonction f plie et entortille un des mètres, l'autre restant droit, et le théorème prouve qu'il existe au moins un point du ruban modifié qui n'a pas changé de position. En dimension deux prenons pour B le disque de rayon un ; cette fois-ci on peut illustrer le théorème avec deux copies initialement superposées d'une carte, l'une des deux pliée et déformée par f. Là encore un point au moins de la carte modifiée n'aura pas changé de position. Mais f doit bien être **continue** : pas de ruptures ni de sauts. Si nous coupons en deux une carte des Pays-Bas en inversant le haut et le bas, aucun point ne gardera la même position.

Ce théorème a pour origine l'application de méthodes topologiques aux équations différentielles, et a été d'abord démontré, en dimension trois, en 1904, par le mathématicien letton Piers Bohl. Il a été redécouvert et démontré dans le cas général par L.E.J. Brouwer et, indépendamment, par Jacques Hadamard en 1910. Brouwer est le père fondateur, au début du 20^{e} siècle, du mouvement « constructiviste » en mathématiques : il récuse, par exemple, le raisonnement selon lequel la fausseté de la non-existence d'une entité mathématique prouve son existence. Il y a de nombreuses démonstrations d'existence non constructives, et l'ironie est que le théorème du point fixe en fait partie : il prouve en effet l'existence d'un point fixe sans fournir aucun moyen, acceptable à un constructiviste, d'en trouver un.

merci à F.G.,O.K.

Lien externe : accromath.uqam.ca/2017/03/point-fixe-et-coloriage/. Brouwer et constructivisme : www.theoremoftheday.org/Docs/Olivier-Keller.pdf

À lire : *Aventures Mathématiques* par Miguel de Guzmán, EPFL Press, 1990.