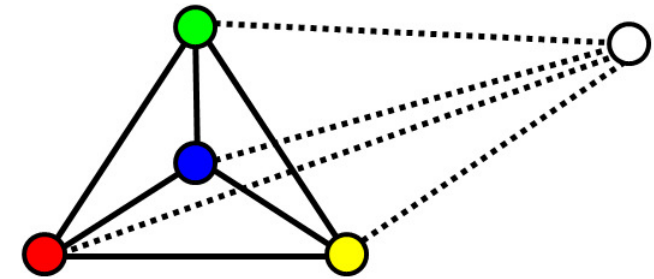
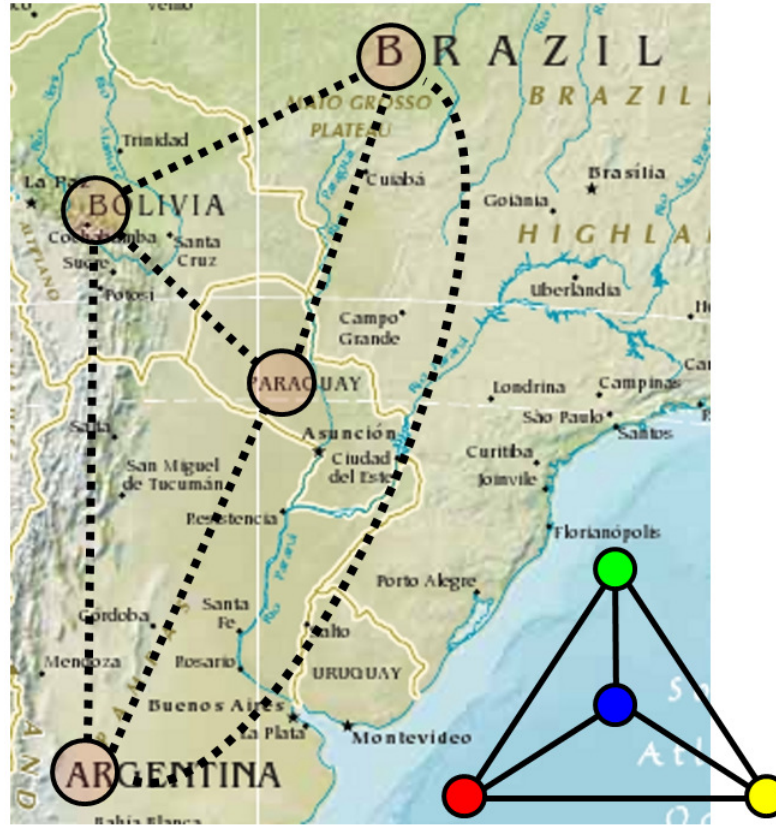


Το θεώρημα των τεσσάρων χρωμάτων: Κάθε επίπεδο γράφημα έχει κανονικό χρωματισμό ο οποίος δεν χρησιμοποιεί περισσότερα από τέσσερα χρώματα.

Ερώτηση: Μπορούμε να χρωματίσουμε τον χάρτη της Νότιας Αμερικής ή της Ευρώπης χρησιμοποιώντας μόνο τέσσερα χρώματα έτσι ώστε χώρες με κοινά σύνορα να έχουν διαφορετικό χρώμα; Μπορούμε να κατασκευάσουμε ένα μαθηματικό μοντέλο στο οποίο αγνοούμε επουσιώδη γεωγραφικά χαρακτηριστικά αντικαθιστώντας τις χώρες με **κορυφές** και εκφράζοντας τα κοινά σύνορα μεταξύ χωρών με **ακμές** κατασκευάζοντας ένα **γράφημα**. Ένας χρωματισμός των κορυφών ονομάζεται **κανονικός** αν δεν υπάρχουν δύο κορυφές του ίδιου χρώματος οι οποίες να συνδέονται μεταξύ τους με μια ακμή. Ένα γράφημα ονομάζεται **επίπεδο** αν μπορεί να σχεδιαστεί χωρίς οι ακμές του να τέμνονται παρά μόνο στις κορυφές. Προφανώς το γράφημα που κατασκευάσαμε έχει αυτήν την ιδιότητα. Οι χάρτες στα δεξιά δείχνουν τέσσερις χώρες οι οποίες συνορεύουν μεταξύ τους ανά δύο. Αυτή η σχέση αντιστοιχεί σε ένα **πλήρες γράφημα** με τέσσερις κορυφές το οποίο χρειάζεται ασφαλώς τέσσερα χρώματα όπως φαίνεται στο αριστερό από τα δύο γραφήματα. Αν υπήρχε μία πέμπτη χώρα η οποία θα συνόρευε και με τις άλλες τέσσερις τότε ασφαλώς θα χρειαζόμασταν και πέμπτο χρώμα. Μόνο που αυτό δεν φαίνεται να μπορεί να συμβεί στην χαρτογραφία αφού θα οδηγούσε σε ένα μη-επίπεδο γράφημα όπως φαίνεται στο δεξί από τα δύο γραφήματα.



Το πρόβλημα προέκυψε το 1852 όταν ο Francis Guthrie παρατήρησε ότι μπορούσε να χρωματίσει τον χάρτη της Αγγλίας με μόνο τέσσερα χρώματα. Μέσω του αδερφού του Frederick το πρόβλημα έφτασε στον Augustus De Morgan ο οποίος το έκανε ευρύτερα γνωστό. Το 1879 ο Alfred Bray Kempe έδωσε μία «απόδειξη», μόνο που έντεκα χρόνια αργότερα ο Percy Heawood παρατήρησε ότι ήταν ελαττωματική. Το λάθος του Kempe είναι ίσως το διασημότερο μαθηματικό λάθος στην ιστορία. Μολαταύτα, το επιχείρημα του Kempe περιείχε το βασικό συστατικό που οδήγησε στην απόδειξη σχεδόν εκατό χρόνια αργότερα: Αρκεί να βρεθεί ένα **αναπόφευκτο** σύνολο S από **ελαττώσιμους** σχηματισμούς. Δηλαδή κάθε χάρτης ο οποίος χρειάζεται πέντε ή περισσότερα χρώματα, πρέπει απαραίτητα να περιέχει ένα σχηματισμό από το σύνολο S ο οποίος οδηγεί στην κατασκευή ενός καινούργιου χάρτη με λιγότερες χώρες και ο οποίος πάλι χρειάζεται τουλάχιστον πέντε ή περισσότερα χρώματα. Αυτό όμως δεν μπορεί να επαναλαμβάνεται επ' άπειρον, οπότε τέτοιος χάρτης δεν μπορεί να υπάρξει.

Στις αρχές του 1900 ο George David Birkhoff καθιέρωσε μια γενική θεωρία ελαττωσιμότητας. Η δυσκολία της πιστοποίησης αναπόφευκτων συνόλων έγινε προσβάσιμη στους υπολογιστές το 1969 από τον Heinrich Heesch με την λεγόμενη «**μέθοδο της εκφόρτισης**». Εν τέλει το 1976 οι Ken Appel και Wolfgang Haken υποβοηθούμενοι από τον John Koch ανακοίνωσαν την απόδειξη του θεωρήματος. Η εξάρτηση από τους ηλεκτρονικούς υπολογιστές έκανε την απόδειξη αμφιλεγόμενη. Είκοσι χρόνια αργότερα δόθηκε μια συντομότερη απόδειξη πάλι βασισμένη στην χρήση ηλεκτρονικών υπολογιστών από τους Robertson, Sanders, Seymour and Thomas. Το θεώρημα πλέον θεωρείται αποδεκτό πέραν πάσης αμφιβολίας. Οφείλουμε όμως να ομολογήσουμε ότι μια βαθύτερη κατανόηση των χρωματισμών γραφημάτων εξακολουθεί να μας διαφεύγει.