Το θεώρημα της Germain: Αν ο p είναι ένας περιττός πρώτος ώστε ο $2p+1$ να είναι επίσης πρώτος, και αν οι x, y, z είναι ακέραιοι οι οποίοι δεν είναι πολλαπλάσια του p, τότε $x^p + y^p \neq z^p$. Άρα οι x, y και z δεν μπορούν να αποτελούν αντιπαράδειγμα στο τελευταίο θεώρημα του Fermat για τον εκθέτη p.

1	2	3	4	?	6	?	8	9	10
?	12	?	14	15	16	?	18	?	20
21	22	?	24	25	26	27	28	?	30
?	32	33	34	35	36	?	38	39	40
?	42	?	44	45	46	?	48	49	50
51	52	?	54	55	56	57	58	?	60
?	62	63	64	65	66	?	68	69	70
?	72	?	74	75	76	77	78	?	80
81	82	?	84	85	86	87	88	?	90
91	92	93	94	95	96	?	98	99	100

1	2	3	4	5	6	?	8	9	10
11	12	?	14	15	16	?	18	?	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
?	32	33	34	35	36	?	38	39	40
41	42	?	44	45	46	?	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	?	60
?	62	63	64	65	66	?	68	69	70
?	72	?	74	75	76	77	78	?	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	?	98	99	100

Το 1637 ο Pierre de Fermat ισχυρίστηκε ότι για $n > 2$ δεν υπάρχουν θετικοί ακέραιοι x, y, z έτσι ώστε $x^n + y^n = z^n$. Ο ισχυρισμός έγινε γνωστός ως το «Τελευταίο Θεώρημα του Fermat». Ο ίδιος ο Fermat απέδειξε την περίπτωση $n = 4$. Από αυτό μπορούμε να αποκλείσουμε και όλα τα πολλαπλάσια του 4. Π.χ. αν $x^8 + y^8 = z^8$, τότε θέτοντας $X = x^2, Y = y^2$ και $Z = z^2$ παίρνουμε $X^4 + Y^4 = Z^4$ το οποίο είναι αδύνατο. Κάθε άλλος εκθέτης n έχει έναν περιττό πρώτο παράγοντα. Ένα παρόμοιο επιχείρημα όπως πιο πάνω δείχνει ότι αρκεί να αποδείξουμε τον ισχυρισμό στις περιπτώσεις όπου ο n είναι περιττός πρώτος. Μέχρι το 1820 αυτό είχε αποδειχθεί μόνο για την περίπτωση $n = 3$ από τον Leonhard Euler. Οπότε για $n \leqslant 100$ έμενε να μελετηθούν τα κόκκινα ερωτηματικά που βρίσκονται στον αριστερό πίνακα. Στις αρχές του 1820 η Sophie Germain άλλαξε ριζικά την εικόνα. Το έργο της έδειξε πως ο ισχυρισμός μπορούσε να αντιμετωπιστεί ακολουθώντας τα εξής δύο στάδια:

Περίπτωση I: Τα x, y και z δεν είναι πολλαπλάσια του n.

Περίπτωση II: Ένα από τα x, y, z είναι πολλαπλάσιο του n.

(Αν δύο από τα x, y, z είναι πολλαπλάσια του n τότε όλα είναι πολλαπλάσια του n. Διαιρώντας τα όλα με το n και επαναλαμβάνοντας αν χρειαστεί καταλήγουμε σε μια από τις Περιπτώσεις I και II.) Το θεώρημα της Germain είναι μια ισχυρή συνθήκη για την Περίπτωση I η οποία μετατρέπει κάποια από τα κόκκινα κελιά σε πορτοκαλιά όπως φαίνεται στον πίνακα δεξιά. Π.χ. το κελί για το $n = 5$ μετατρέπεται σε πορτοκαλί επειδή ο $11 = 2 \times 5 + 1$ είναι πρώτος. Αντίθετα το κελί για το $n = 7$ παραμένει κόκκινο επειδή ο $15 = 2 \times 7 + 1$ δεν είναι πρώτος. Στην πραγματικότητα, το πλήρες θεώρημα της Germain είναι ακόμη πιο ισχυρό, και της επέτρεψε να μετατρέψει όλα τα κόκκινα κελιά της εικόνας σε πορτοκαλιά. Μάλιστα, συλλογικά με τον Adrien-Marie Legendre, κατάφεραν να αποδείξουν την Περίπτωση I για όλα τα $n < 197$. Εν τέλει ο ισχυρισμός αποδείχθηκε το 1994 από τον Andrew Wiles.

Η Sophie Germain (1776 – 1831) παρά την αρχική αντίθεση των γονιών της καθώς και όλες τις αντιξοότητες που είχε να αντιμετωπίσει σε μια ανδροκρατούμενη κοινωνία, κατάφερε να μορφωθεί διαβάζοντας βιβλία διάσημων μαθηματικών όπως του Euler από την βιβλιοθήκη του πατέρας της. Είχε αλληλογραφία επικοινωνώντας επί ίσοις όροις με τους διάσημους μαθηματικούς της εποχής της Lagrange και Gauss αποκρύπτοντας όμως το φύλο της και χρησιμοποιώντας το ανδρικό ψευδώνυμο Monsieur LeBlanc. Πέραν της ενασχόλησής της με την Θεωρία Αριθμών έκανε επίσης πρωτοποριακό έργο στην Θεωρία της Ελαστικότητας το οποίο και βραβεύθηκε με το Μέγα Βραβείο της Γαλλικής Ακαδημίας Επιστημών. Οι πρώτοι αριθμοί p για τους οποίους ο $2p+1$ είναι επίσης πρώτος ονομάζονται σήμερα «πρώτοι Germain» και έχουν σημαντικές εφαρμογές και σε άλλους τομείς όπως π.χ. στην κρυπτογραφία.